УДК 163 DOI: 10.18698/2306-8477-2023-6-853

# «Возможные миры» как инструмент построения семантики некоторых неклассических логик

© Н.Л. Архиереев

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

*Формализация и аксиоматизация классической логики, осуществленная в начале XX в., позволила точным образом сформулировать лежащие в ее основе философско-методологические предпосылки. Многие из этих предпосылок немедленно стали предметом критики и определенной ревизии, что привело в итоге к созданию обширного семейства неклассических логик. Несмотря на то что множество логических систем, которые сегодня относят к неклассическим, не просто бесконечно, а континуально, все их можно отнести к одному из трех основных классов: логики, рассматривающие структурные отношения между не ассерторическими высказываниями; логики, использующие нестандартные модели пропозициональных функций; логики, включающие как ассерторические, так и не ассерторические высказывания. К логическим системам последнего типа относятся основные модальные системы Льюиса, изначально призванные «нейтрализовать» парадоксы материальной импликации, являющейся в классической логике моделью отношения дедуктивного логического следования. Наиболее распространенным способом построения семантики для этих систем является аппарат возможных миров. Проанализирован ряд особенностей и формальных проблем построения такого рода семантик.*

***Ключевые слова:*** *неклассические логики, материальная импликация, строгая импликация, модальные операторы, возможный мир*

Классическая логика высказываний и предикатов (называемая обычно логикой Фреге — Рассела) базируется на ряде методологических принципов, являющихся результатом конкретизации и уточнения общих принципов рационального мышления, предложенных еще в аристотелевском «Органоне». В качестве основных принципов классической логики обычно называют принципы тождества, непротиворечия, исключенного третьего, а также принципы бивалентности и функциональности [1, с. 21]. Согласно принципу тождества, в системе высказываний или рассуждении одно и то же высказывание (переменная) имеет одно и то же истинностное значение. Согласно принципу бивалентности, высказывания принимают значения из двухэлементного множества $\{1, 0\}$, где 1 обычно отождествляется с содержательным значением «и» («истина»), а 0 — со значением «л» («ложь»). Согласно принципу непротиворечия, высказывание принимает ровно одно значение из указанного множества, а согласно принципу исключенного третьего, высказывание обязательно принимает одно из этих двух значений. Наконец, согласно принципу функциональности, логические связки представляются в виде функций, область определения и область значений которых содержит элементы множества $\{1, 0\}$.

Основанную на перечисленных принципах логическую систему естественно рассматривать как модель, отображающую структурные отношения (отношения по логическим формам) между так называемыми ассерторическими (фактофиксирующими) высказываниями.

Формализация и аксиоматизация классической логики, осуществленная в начале XX в., дала мощный импульс развитию целого семейства так называемых неклассических логик. Еще Аристотель указывал на недостаточность средств традиционной логики для анализа и оценки высказываний о потенциальном бытии (проблема истинностного статуса высказываний о будущих случайных событиях). Однако только строгая экспликация принципов классической логики в виде непротиворечивых и полных формальных систем, построенных по образцам математических теорий, обеспечила возможность создания альтернативных логических теорий, поскольку конструировались подобные альтернативные теории логического вывода нередко за счет критики и отказа от (по крайней мере) некоторых из указанных принципов классической логики.

Согласно одной из распространенных в современной логике точек зрения, при понимании логической системы как модели некоторого класса естественных рассуждений все неклассические логики можно отнести к одному из трех основных типов [1, с. 21, 22].

К *первой разновидности* относятся неклассические системы, моделирующие отношения по логическим формам не между ассерторическими высказываниями, а между высказываниями других логических типов — например, между модальными. (Напомним, модальными называются высказывания, включающие характеристику описанных в них ситуаций как необходимых, возможных, невозможных, случайных.) К этому типу неклассических логических систем относятся некоторые многозначные логики — например, известная трехзначная логика $L_3$ Я. Лукасевича, предложенная изначально для решения вышеупомянутой проблемы высказываний о будущих случайных событиях. В данной системе не выполняются «классические» принципы бивалентности, непротиворечия и исключенного третьего. Множество допустимых истинностных значений высказываний системы $L_3$ трехэлементно $\{1, 1/2, 0\}$, где значение 1/2 можно понимать как «неопределенно». Модальные операторы необходимости, возможности, случайности ($\Box$, $\Diamond$, $\nabla$ соответственно) не вводятся в язык системы в качестве исходных выражений ее языка, но могут быть определены в ней матричным способом. (Высказывание $\Box p$ оценивается как истинное, если только $p$ принимает значение 1; высказывание $\Diamond p$ оценивается как истинное, если $p$ принимает одно из значений 1, 1/2; высказывание $\nabla p$ оценивается как истинное, если только $p$ принимает значение 1/2).

Ко *второй разновидности* неклассических логик в смысле упомянутой классификации относятся системы, использующие нестандартные модели логических функций. Например, основные системы так называемой релевантной логики, позволяющей моделировать связь между высказываниями по информации.

Наконец, к *третьей разновидности* неклассических логик относятся системы, рассматривающие, наряду с ассерторическими высказываниями, отношения по логическим формам между высказываниями других логических типов (между модальными высказываниями). Данные системы строятся как расширение классической логики и, соответственно, сохраняют все ее основные законы и принципы.

Основная часть настоящей статьи будет посвящена рассмотрению ряда технических особенностей построения логических систем третьего типа и проблем их содержательного истолкования.

Как известно, в классической логике языковой моделью метаязыкового отношения дедуктивного логического следования является элементарная двухместная логическая функция $\supset$ — материальная импликация. Согласно матричному определению данной функции, истинное высказывание имплицируется любым (при истинном следствии условное высказывание является истинным независимо от значения основания) и ложное высказывание имплицирует любое (при ложном основании условное высказывание оказывается истинным независимо от значения следствия). Однако метатеоретическое отношение логического следования обладает в действительности более сильными свойствами: логически истинное (необходимое) высказывание имплицируется любым; логически ложное (невозможное) высказывание имплицирует любое. Данные свойства отношения дедуктивного логического следования и такие его характеристики, как рефлексивность, транзитивность, монотонность, не могут быть отражены средствами двухзначной истинностно-функциональной логики. Кроме того, попытка истолкования знака импликации как аналога отношения логического следования в некоторых формулах классической логики высказываний (далее — к.л.в.) ведет к парадоксальным следствиям. Например, теоремой к.л.в. является формула $(A \supset B) \lor (B \supset A)$. При истолковании знака $\supset$ как модели логического следования получаем интуитивно неприемлемое утверждение: для произвольной пары формул $A$, $B$ верно, что либо $A$ логически влечет $B$, либо $A$ логически следует из $B$.

С целью построения более адекватной языковой модели отношения дедуктивного логического следования американские логики К.И. Льюис и К. Лэнгфорд в 1918–1932 гг. предложили системы $S1$–$S5$ модальной логики, свободные от большинства вышеописанных недостатков материальной импликации [2, 3]. Собственно модальные операторы $\Diamond$, $\Box$ при построении систем строгой импликации играли вспомогательную роль — с их помощью определялась функция $<$, названная авторами *строгой импликацией*: $A < B \Leftrightarrow \neg\Diamond(A \wedge \neg B)$ ($A$ строго имплицирует $B$, если только логически невозможна ситуация, при которой $A$ истинна, а $B$ ложна. Эквивалентное определение строгой импликации с оператором необходимости: $A < B \Leftrightarrow \Box(A \supset B)$).

При этом смысл оператора возможности $\Diamond$ трактовался через понятие «самосовместимости» (логической непротиворечивости): формула $\Diamond A$ истинна, если предположение об истинности $A$ не ведет к противоречию или допущение об истинности $A$ не противоречит имеющейся информации о соответствующей предметной области. Соответственно, формула $\Diamond A$ ложна (формула $\Box \neg A$ истинна), если только допущение о выполнимости формулы $A$ логически противоречиво.

К сожалению, предложенные Льюисом и Лэнгфордом системы были сформулированы чисто аксиоматически и не имели содержательной теоретико-модельной интерпретации. Первые семантики для систем Льюиса — Лэнгфорда были построены в терминах топологии и алгебры, т. е. также носили сугубо формальный характер, что, разумеется, затрудняло их истолкование в качестве моделей некоторого класса естественных рассуждений и затемняло смысл используемых в них модальных операторов.

Ситуация стала меняться в конце 1950-х — начале 1960-х годов, когда для ряда систем неклассической логики (в том числе и некоторых льюисовских систем) в работах Я. Хинтикки, Р. Монтегю, С. Кангера и в первую очередь С. Крипке были предложены так называемые семантики возможных миров. Исходными понятиями в семантиках данного типа являются понятие возможного мира, отношения «достижимости» (относительной возможности) между мирами, а также понятия фрейма (шкалы Крипке) и модельной структуры.

Фрейм обычно определяется как упорядоченная пара элементов $<W, R>$, где $W$ — некоторое непустое множество «возможных миров», понимаемых как мыслимые (альтернативные) положения дел или допустимые состояния предметной области теории, а $R$ ($R \subseteq W \times W$) — двухместное отношение, связывающее «возможные миры» (дополнительное отношение порядка, заданное на множестве возможных миров).

Модельная структура обычно определяется как трехэлементное множество $<W, R, |\ |>$, где $|\ |$ является функцией интерпретации формул (функцией приписывания значений выражениям языка логической системы в различных возможных мирах).

Выражение $kRv$ (где $k \in W$, $v \in W$) может читаться как «мир $v$ возможен относительно $k$» или «мир $v$ достижим из $k$». При этом семантика модальной системы описывается как множество модельных структур [4, 5].

Выражение $|B|_k$ обычно читается как «значение формулы $B$ в мире $k$». При этом $| B |_k \in \{1, 0\}$ (в возможном мире формула принимает ровно одно значение из множества $\{1, 0\}$).

Значения формулам, не имеющим вхождений модальных операторов, приписываются стандартным образом. Например:

$| A \wedge B |_k = 1 \Leftrightarrow | A |_k = 1$ и $| B |_k = 1$;

$| A \supset B |_k = 1 \Leftrightarrow | A |_k = 0$ или $| B |_k = 1$ и т. д.

Фактически определения значений «безмодальных» формул логики высказываний в семантике возможных миров совпадают с матричными определениями значений соответствующих формул в классической логике, и понятие возможного мира для формул к.л.в. полностью совпадает с понятием классического описания состояния (о.с.).

Значение формулы $\Box B$ ($\Box$ — оператор необходимости) определяется следующим образом: $| \Box B |_k = 1 \Leftrightarrow \forall m\ (kRm \Rightarrow | B |_m = 1)$ — формула $\Box B$ истинна в мире $k$, если и только если (е.т.е.) для любого мира $m$ такого, что он достижим из $k$, верно, что формула $B$ истинна в $m$.

Соответственно, значение формулы $\Diamond B$ ($\Diamond$ — оператор возможности) определяется так: $| \Diamond B |_k = 1 \Leftrightarrow \exists m\ (kRm \wedge | B |_m = 1)$ — формула $\Diamond B$ истинна в мире $k$, е.т.е. существует по крайней мере один достижимый из $k$ мир $m$ такой, что формула $B$ истинна в нем.

Производными от этих базовых определений являются определения (логической) выполнимости и общезначимости формул.

*Формула выполнима в модельной структуре*, е.т.е. существует мир в множестве $W$ этой структуры, в котором данная формула истинна.

*Формула общезначима в модельной структуре*, е.т.е. она истинна в каждом элементе из $W$ этой структуры (истинна в каждом мире данной модельной структуры).

*Формула логически выполнима*, е.т.е. существует хотя бы одна модельная структура $<W, R, |\ |>$, в которой данная формула выполнима.

*Формула логически общезначима*, е.т.е. она общезначима в каждой модельной структуре $<W, R, |\ |>$.

Наиболее важным классом модальных систем рассматриваемого типа является класс так называемых *нормальных* модальных систем. При построении нормальных модальных систем к аксиомам и правилам вывода к.л.в. добавляются некоторые собственные модальные аксиомы и так называемое правило Геделя ($RG$), или правило введения необходимости: $\vdash A \Rightarrow \vdash \Box A$. В содержательном плане данное правило означает, что если некоторая формула является теоремой логической системы, то теоремой этой системы должно быть и утверждение о логической необходимости (необходимой истинности) этой формулы. В противном случае используемое в системе понятие необходимости нельзя считать логическим.

К основным системам нормальной модальной логики относятся системы $K$, $D$, $T(M)$, $B$, $S4$, $S5$.

Система $K$ получается в результате добавления к аксиомам и правилам вывода классического исчисления высказывания упомянутого выше правила Геделя и аксиомы $\Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)$. Система $D$ образуется за счет добавления к аксиомам и правилам вывода системы $K$ аксиомы $\Box A \supset \Diamond A$. Система $T$ ($M$), предложенная Р. Фейсом и Г. Фон Вригтом, строится за счет добавления к системе $K$ аксиомы $\Box A \supset A$. Система $B$, обычно называемая брауэровой, является расширением $T$ за счет добавления к ее постулатам аксиомы $A \supset \Box\Diamond A$. Система $S4$ является расширением $T$ за счет добавления к ее аксиомам и правилам вывода аксиомы $\Box A \supset \Box\Box A$. Наконец, система $S5$ может быть получена в результате объединения множеств постулатов систем $T$, $B$, $S4$ или добавления к постулатам системы $T$ единственной аксиомы $\Diamond A \supset \Box\Diamond A$.

Модельные структуры различных логических систем могут различаться дополнительными ограничениями, налагаемыми на отношение достижимости $R$.

В «базовой» нормальной системе $K$ никаких дополнительных ограничений на отношение достижимости не налагается. Более того, принимается допущение о существовании так называемых тупиковых миров — миров, из которых недостижимы никакие другие элементы $W$, в том числе и сами тупиковые миры (тупиковый мир «невидим» ни для одного возможного мира, в том числе для самого себя). Исходя из условий истинности/ложности формул с модальными операторами, для таких миров принимается следующее соглашение: все формулы с операторами $\Box$ истинны в тупиковых мирах, все формулы с операторами $\Diamond$ — ложны. В пользу оправданности такого соглашения обычно выдвигаются следующие соображения.

Формула $\Box A$ истинна в некотором исходном мире, если формула $A$ истинна в каждом мире, достижимом из исходного. Поскольку множество миров, достижимых из тупикового, пусто, можно считать, что в каждом элементе этого множества формула $A$ истинна (поскольку $A$ не может быть опровергнута ни в одном мире, достижимом из тупикового, так как этих миров просто нет, формулу $\Box A$ в исходном мире можно считать тривиальным образом истинной).

Формула $\Diamond A$ истинна в некотором исходном мире, если существует хотя бы один достижимый из него мир, в котором формула $A$ истинна. Поскольку ни одного такого мира не существует, все формулы вида $\Diamond A$ в тупиковом мире можно считать тривиальным образом ложными.

Не обсуждая содержательную обоснованность указанных соглашений, отметим, что с чисто «технической» точки зрения они обеспечивают для системы $K$ общезначимость аксиомы $\Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)$

и корректность применения правила Геделя во всех модельных структурах.

В системе $D$ отношение достижимости должно быть *связным*. Это означает, что ни один возможный мир не является тупиковым (для любого элемента $W$ всегда существует некоторый достижимый из него «альтернативный» мир: $\forall k \in W\ \exists m \in W\ kRm$). Данное требование к $R$ обеспечивает общезначимость аксиомы $\Box A \supset \Diamond A$.

В системе $T$ отношение достижимости должно быть рефлексивным (каждый мир должен быть достижимым из самого себя: $\forall k \in W\ kRk$). Данное условие является необходимым для выполнения аксиомы $\Box A \supset A$.

В системе $B$ отношение $R$ должно быть рефлексивным и симметричным. Условие симметричности ($\forall k \in W$, $\forall m \in W\ kRm \Rightarrow mRk$) необходимо для выполнения аксиомы $A \supset \Box\Diamond A$.

В системе $S4$ отношение $R$ должно быть рефлексивным и транзитивным. Транзитивность отношения достижимости ($\forall k \in W$, $\forall m \in W$, $\forall n \in W\ kRm$, $mRn \Rightarrow kRn$) является необходимым условием для выполнения аксиомы $\Box A \supset \Box\Box A$).

Наконец, в системе $S5$ отношение достижимости между мирами оказывается отношением эквивалентности — оно рефлексивно, симметрично и транзитивно, в результате чего в модельной структуре системы $S5$ «каждый мир достижим из каждого», т. е. все возможные миры, входящие в $W$ некоторой модельной структуры, связаны отношением достижимости. На синтаксическом уровне эта особенность выражается аксиомой $\Diamond A \supset \Box\Diamond A$ — все, что оценивается как (логически) возможное, необходимо является таковым («возможности не исчезают»).

Для всех описанных выше систем нормальной модальной логики в терминах модельных структур доказаны метатеоремы о семантической непротиворечивости и полноте (например, для $S5$ это означает, что семантика всех модельных структур с рефлексивным, симметричным и транзитивным отношением достижимости непротиворечива и полна относительно соответствующей системы аксиом).

Очевидно, однако, что понятие модельной структуры, как и понятие отношения достижимости в каждой из описанных ранее систем модальной логики, определяются на основе сугубо формальных соображений. В частности, дополнительные ограничения, налагаемые на отношение достижимости в каждой из названных систем, подбираются таким образом, чтобы все аксиомы системы были общезначимыми в семантике. Содержательный смысл используемых в системах модальных понятий остается при этом непроясненным. Наконец, центральное для семантик данного типа понятие «возможный мир» и особенно такая вышеупомянутая его разновидность, как «тупиковый возможный мир», не имеет, как выясняется, общепринятого и содержательно приемлемого определения и нуждается в дополнительном истолковании.

На протяжении ряда лет осуществлялись безуспешные попытки построения семантик возможных миров с бинарным (двухместным) отношением достижимости для ряда систем релевантной логики. В результате для данного типа неклассических логик были предложены семантики возможных миров с обобщенным тернарным (трехместным) отношением достижимости. К сожалению, в семантиках возможных миров для релевантных логик соответствующие ограничения на отношение достижимости между мирами подбираются исключительно с учетом необходимости выполнения определенных аксиом системы, т. е. на основе сугубо формальных соображений, что еще более затрудняет содержательную трактовку понятия «возможный мир». Кроме того, соответствующие системы логического вывода, построенные, например, на базе известного аппарата семантических таблиц, оказываются в большинстве случаев неоправданно громоздкими в техническом плане, что ведет к следующей парадоксальной ситуации: иногда способ проверки корректности дедуктивных выводов в соответствующей логической системе может быть полностью формализован и «передан» компьютеру (реализован в виде компьютерной программы), но оказывается совершенно непригодным для применения «живым» пользователем.

Одним из «паллиативных» способов решения указанной проблемы и одновременно вариантом ответа на вопрос о природе возможных миров является чисто инструменталистская позиция: возможные миры представляют собой объекты сугубо «технической» природы, свойства которых постулируются таким образом, чтобы в формальной семантике некоторой логической системы были общезначимы ее фундаментальные законы (аксиомы) и выполнялись соответствующие утверждения о корректности умозаключений.

Однако, по замечанию известного австралийского ученого-логика Грэма Приста, данная точка зрения (как и любой вариант инструментализма) кажется крайне неудовлетворительной [5, p. 28]. Если формальной аппарат теории успешно справляется с решением определенных задач, закономерным кажется вопрос о причинах этого успеха. Ответ на подобный вопрос, в свою очередь, непосредственно связан с пониманием онтологии предметной области, которую репрезентирует формальный аппарат теории. Отказ от возможности содержательного истолкования базовых понятий логической системы неизбежно ставит под вопрос как наличие собственной предметной области у логики (отличающей ее, например, от теории формальных систем), так и ее способность моделировать структурные отношения между некоторыми реальными формами мысли.

Все изложенное требует более подробного анализа содержательных оснований введения самого понятия «возможный мир» и истории его использования в философской логике и некоторых естественных науках, что является темой для самостоятельного исследования.

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Ивлев Ю.В. *Квазиматричная (квазифункциональная) логика.* Москва, Издательство Московского университета, 2018, 16 с.

[2] Ивлев Ю.В. *Модальная логика*. Москва, Издательство Московского университета, 1991, 224 с.

[3] Фейс Р. *Модальная логика*. Москва, ФИЗМАТЛИТ, 1974, 520 с.

[4] Hintikka J. *Models for Modalities. Selected Essays*. Netherlands, D. Reidel Publishing Company, 1969, 220 p.

[5] Priest G. *An Introduction to Non-Classical Logic. From If to Is*. New York, Cambridge University Press, 2008, 613 p.

Статья поступила в редакцию 01.12.2023

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Архиереев Н.Л. «Возможные миры» как инструмент построения семантики некоторых неклассических логик. *Гуманитарный вестник*, 2023, вып. 6.
http://dx.doi.org/10.18698/2306-8477-2023-6-853

**Архиереев Николай Львович** — д-р филос. наук, профессор кафедры «Философия» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: arkhnl@bmstu.ru

# Possible Worlds as a tool in constructing semantics of certain non-classical logics

© N.L. Arkhiereev

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

*Classical logic was formalized and axiomatized in the beginning of the XX century and made it possible to accurately formulate philosophical and methodological premises underlying it. Many of these premises immediately became the subject of criticism and certain revision, which ultimately led to creation of an extensive family of the non-classical logics. Despite the fact that the set of logical systems that today are classified as the non-classical is not just infinite, but continual, all of them could be classified in one of the three main classes. They are logics that consider structural relations between the non-assertoric statements; logics that introduce non-standard models of the propositional functions; logics that include both assertoric and non-assertoric statements. The Lewis's basic modal systems are related to logical systems of the latter type. They were initially designed to neutralize paradoxes of the material implication, which in classical logic is a model of the deductive logical implication relationship. The Possible Worlds apparatus appears to be the most common way to construct semantics for these systems. The paper analyzes a number of features and formal problems in constructing this kind of semantics.*

***Keywords:*** *non-classical logics, material implication, strict implication, modal operators, Possible World*

## REFERENCES

[1] Ivlev Yu.V. *Kvazimatrichnaya (kvazifunktsionalnaya) logika* [Quasi-matrix (quasi-functional) logic]. Moscow, Moscow University Publ., 2018, 16 p.
[2] Ivlev Yu.V. *Modalnaya logika* [Modal logic]. Moscow, Moscow University Publ., 1991, 224 p.
[3] Feys R. *Modal logic*. Louvain, E. Nauwelaerts, Paris, 1965 [In Russ.: Feys R. Modalnaya Logika. Moscow, Fizmatlit Publ., 1974, 520 p.].
[4] Hintikka J. *Models for Modalities*. *Selected Essays*. Netherlands, D. Reidel Publishing Company, 1969, 220 p.
[5] Priest G. *An Introduction to Non-Classical Logic. From If to Is*. New York, Cambridge University Press, 2008, 613 p.

**Arkhiereev N.L.,** Dr. Sc. (Philosophy), Professor, Department of Philosophy, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: arkhnl@bmstu.ru