

## Формирование творческого мышления студентов в процессе решения задач по начертательной геометрии

77-48211/475736

# 09, сентябрь 2012

Добровольская Н. А., Жирных Б. Г.

УДК 514.18

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

[alexbaev@mail.ru](mailto:alexbaev@mail.ru)

В век научно-технического прогресса встает задача подготовки специалистов, способных к самостоятельным творческим решениям в практической деятельности.

Традиционные знания и умения, хотя и являются необходимым условием возможной творческой деятельности, отнюдь еще не достаточны.

Для становления творческой деятельности нужны, кроме того, особые знания и умения.

В настоящее время уже определены некоторые общие требования к таким знаниям и умениям. В частности, установлено, что необходимо вооружить обучаемых обобщенными приемами решения разных видов задач определенного класса.

Таковыми задачами в начертательной геометрии являются задачи по выбору поверхностей посредников для построения линии пересечения двух поверхностей.

Во всех учебниках начертательной геометрии рекомендуется выбирать посредники, которые пересекали бы исходные поверхности по простым линиям. Помощь в выборе посредников предлагается в виде определенных семейств поверхностей, используемых для построения линии пересечения в каждом конкретном случае. Например, в качестве посредников предлагается семейство плоскостей или семейства концентрических или эксцентрических сфер.

На практике студент, перебирая известные поверхности, путём проб и ошибок не всегда приходит к правильному решению.

Но можно подойти более обобщённо к решению этой задачи: не перебирать поверхности, а конструировать посредники самостоятельно.

Ниже предлагается сокращённый и развёрнутый состав действий по решению этой задачи.

Точки линии пересечения получают при пересечении двух выделенных с помощью ряда посредников линий в пересекающихся поверхностях. Но эти две пересекающиеся линии принадлежат одновременно и поверхности-посреднику, являясь геометрическими элементами его формы. Поэтому, можно рассматривать

---

---

решение этой задачи в следующей последовательности (сокращенный состав действий):

1. Выделить в каждой исходной поверхности семейства простейших линий: прямых или окружностей.
2. Создать из выделенных линий пары теоретически пересекающихся линий.
3. Сформировать разные формы поверхностей-посредников из выделенных пар линий.
4. Выбрать наиболее удобные поверхности для решения задачи.

Ниже приводится развёрнутый состав деятельности по формированию поверхностей-посредников.

### Конструирование поверхностей-посредников

Состав действий	Теоретические положения
А. Сконструировать форму поверхности-посредника	<p>Сконструировать форму поверхности – это значит разработать определитель поверхности, т.е. совокупность геометрических фигур и связей между ними, которые однозначно определяют поверхность</p> $\Phi(\Gamma)[A]$ <p>(<math>\Gamma</math>) – геометрическая часть определителя, [A] – алгоритмическая часть определителя.</p>
I. Разработать геометрическую часть определителя поверхности-посредника	<p>Геометрическая часть определителя (<math>\Gamma</math>) – совокупность геометрических фигур (точек, линий, поверхностей), участвующих в образовании поверхности.</p>
1. Установить геометрические фигуры, определяющие поверхность-посредник	<p>Каждая поверхность-посредник включает в себя две пересекающиеся линии исходных поверхностей, дающих точку линии пересечения. Частично эти две линии определяют форму поверхности-посредника, являясь геометрическими характеристиками определителя.</p>

<p>а) Установить семейства простейших линий, принадлежащих исходным поверхностям</p>	<p>К простейшим линиям в начертательной геометрии относятся прямые и окружности. Эти линии обычно бывают образующими и направляющими поверхности.</p>
<p>б) Установить все возможные пары теоретически пересекающихся простейших линий исходных поверхностей.</p>	<p>В зависимости от количества простейших линий, составляющих исходные поверхности, получается несколько пар теоретически пересекающихся линий, образующих поверхности-посредники.</p> <p>Например, если в двух исходных поверхностях <math>\alpha</math> и <math>\beta</math> образующие (<math>g_\alpha</math> и <math>g_\beta</math>) и направляющие (<math>d_\alpha</math> и <math>d_\beta</math>) являются простейшими линиями, то получится четыре пары теоретически пересекающихся линий: <math>g_\alpha \cap g_\beta</math>; <math>g_\alpha \cap d_\beta</math>; <math>g_\beta \cap d_\alpha</math>; <math>d_\alpha \cap d_\beta</math>.</p>
<p>2. Выбрать одну из пар пересекающихся линий</p>	<p>Пары пересекающихся линий следующие: <math>g_\alpha \cap g_\beta</math>; <math>g_\alpha \cap d_\beta</math>; <math>g_\beta \cap d_\alpha</math>; <math>d_\alpha \cap d_\beta</math>.</p>
<p>II. Разработать алгоритмическую часть определителя [А]</p>	<p>В алгебраической части определителя [А] указываются взаимосвязи между геометрическими объектами и законы их перемещения относительно друг друга.</p>
<p>1. Установить функции линий</p>	<p>Линии поверхности могут быть образующими или направляющими.</p>
<p>2. Установить особенности расположения выбранных линий в исходных поверхностях</p>	<p>В пересекающихся поверхностях как образующие, так и направляющие, имеют особенности расположения в соответствии с законом их перемещения. Например, все образующие конической поверхности проходят через одну точку- вершину конической поверхности; образующие цилиндрической поверхности параллельны одному направлению и т.д. эти особенности определяют закон перемещения в выбранной паре теоретически пересекающихся линий.</p>

3. Установить закон перемещения образующих по направляющим	Линии между собой могут быть связаны поступательным, вращательным, винтовым перемещением.
III. Установить формы поверхностей-посредников для всех выделенных пар пересекающихся линий	Поверхность-посредник сформирована, если для каждой выделенной пары пересекающихся линий исходных поверхностей установлены все взаимосвязи.
IV. Выбрать поверхность-посредник для решения данной задачи	Из сформированных поверхностей-посредников выбирается наиболее простая поверхность, приводящая с наименьшими построениям к решению задачи.

Развёрнутый состав действий даёт возможность студенту без пропуска логических звеньев осмыслить все взаимосвязи создания поверхностей-посредников и начать их самостоятельную разработку.

Используя при решении нескольких задач развёрнутый состав действий, он постепенно переходит на сокращённый алгоритм.

### Пример конструирования форм поверхностей-посредников (развёрнутый состав действий).

На чертеже представлены (рис.1):  
 $\alpha$ - прямой круговой конус:  $i_k \perp \pi_1$ ,  
 $\beta$ - сферическая поверхность.

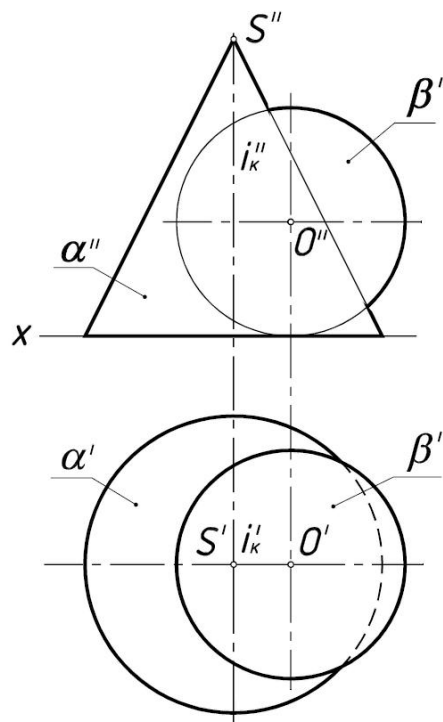


Рис.1

Решение задачи начинаем согласно выбранному составу действий с организации геометрической части поверхности-посредника (действие I).

1. Устанавливаем геометрические фигуры, определяющие поверхность-посредник.

а) Устанавливаем семейства простейших линий, принадлежащих исходным поверхностям:

- для конической поверхности  $\alpha$ :

образующие  $g_\alpha$  - прямые и направляющие  $d_\alpha$  - окружности (рис.2а).

- для сферической поверхности  $\beta$ :

образующие окружности  $g_\beta$  (меридианы) и направляющие окружности  $d_\beta$  (параллели) (рис.2б).

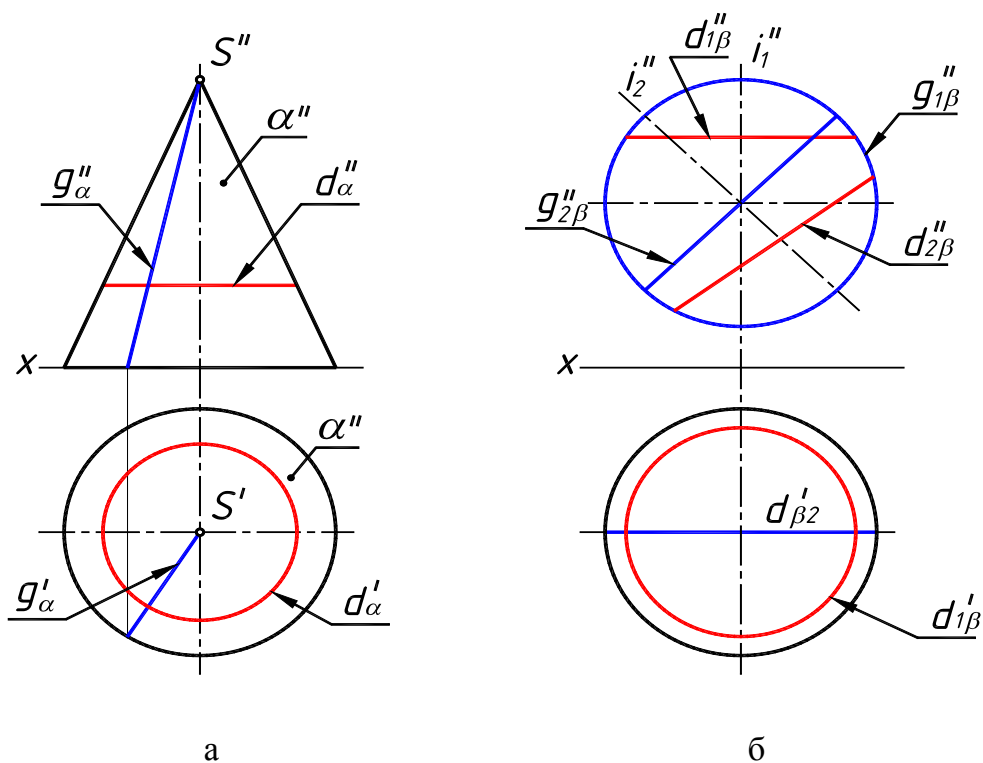


Рис.2

б) Устанавливаем все возможные пары теоретически пересекающихся простейших линий. Таких пар будет четыре:  $g_\alpha \cap d_\beta$  (рис.3а);  $g_\alpha \cap g_\beta$  (рис.3б);  $d_\alpha \cap d_\beta$  (рис.3в);  $d_\alpha \cap g_\beta$  (рис.3г).

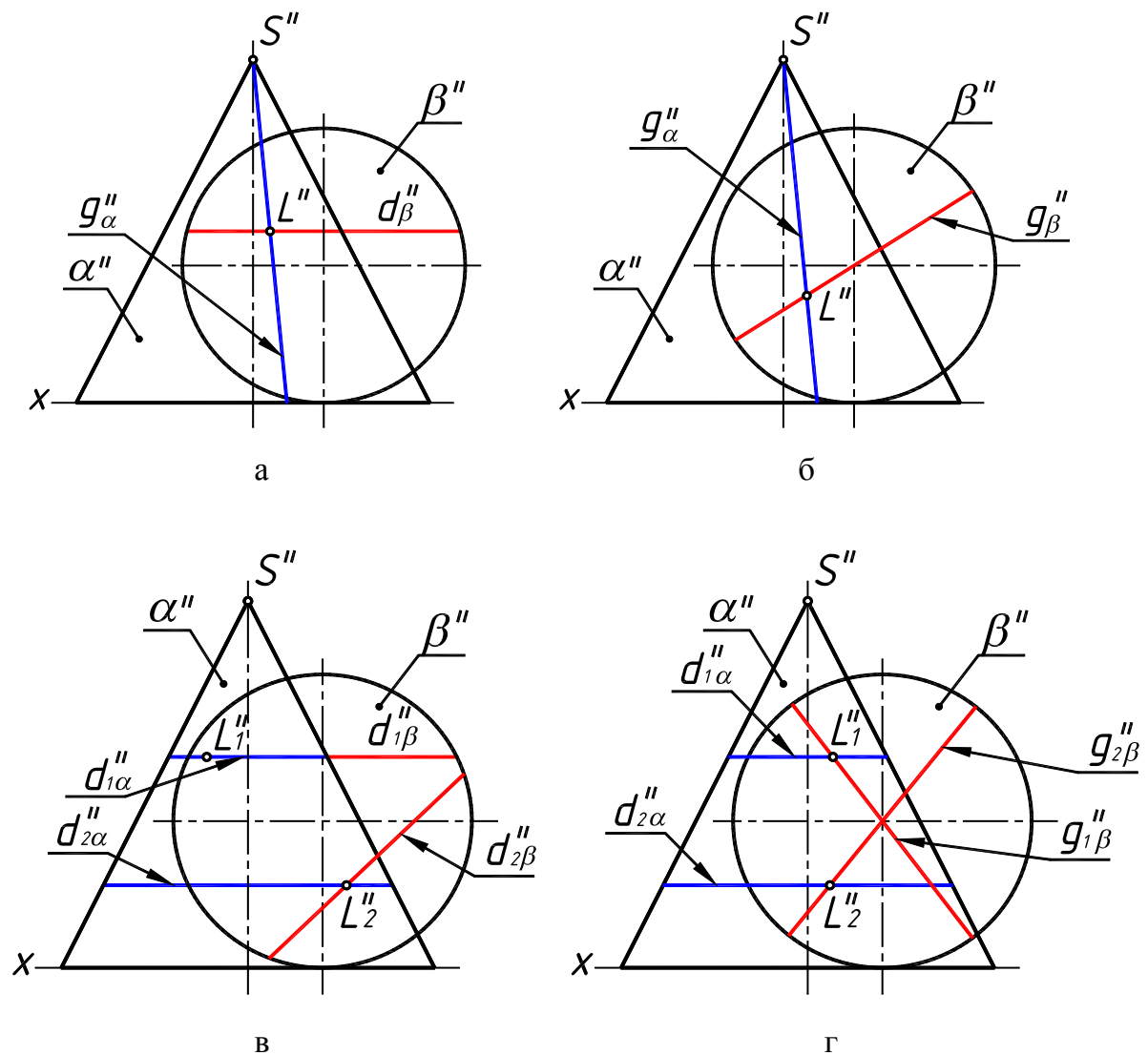


Рис.3

2. Выбираем одну из пар теоретически пересекающихся линий  $g_{\alpha} \cap d_{\beta}$  (образующие конуса пересекают параллели сферы) (рис.3а).

II. Разрабатываем алгоритмическую часть определителя [A]: устанавливаем взаимосвязи между линиями и законы их перемещения относительно друг друга.

1. Устанавливаем функции линий:  $g$  – образующая,  $d$  – направляющая.

2. Устанавливаем особенности расположения линий в исходных поверхностях.

- В поверхности  $\alpha$  все образующие проходят через одну точку  $S$  (вершину конуса).

- В поверхности  $\beta$  направляющие  $d_{\beta}$  могут иметь произвольное расположение, перпендикулярное оси вращения сферы. Поскольку у сферы бесчисленное множество осей вращения, то и параллели могут располагаться в самом различном направлении.

3. Устанавливаем закон перемещения образующих по направляющим: образующие  $g_{\alpha}$  проходят через одну точку  $S$  и должны перемещаться по окружности  $d_{\beta}$ .

III. В данном случае для выделенной пары линий  $g_{\alpha} \cap d_{\beta}$  сформированные взаимосвязи однозначно определяют форму поверхности-посредника  $\gamma$ . Это коническая поверхность с вершиной в точке  $S$  и направляющей окружностью  $d_{\beta}$  (коническая поверхность с круговыми сечениями) (рис.4).

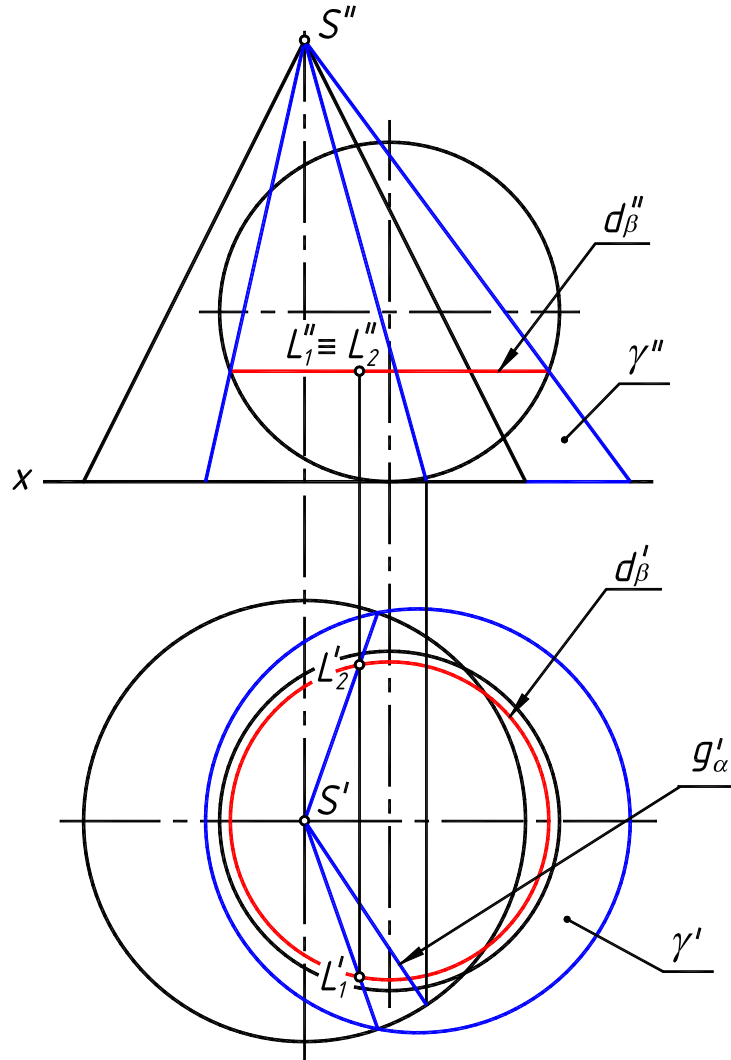


Рис.4

При введении поверхностей-посредников  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  и т.д. мы будем получать точки линии пересечения  $L_1, L_2, L_3$  и т.д.

Параллелей у сферы бесчисленное множество. Следовательно, разнообразных конических поверхностей в случае  $g_{\alpha} \cap d_{\beta}$  тоже множество, т.к. в качестве направляющей  $d_{\beta}$  может служить любая параллель, представленная на рис.2б.

IV. Из множества конических посредников, которые мы можем создать, мы выбираем, как наиболее удобный, вариант, представленный на рис.4, т.к. в

данном случае мы получаем конус с круговыми сечениями, что удобно для решения задачи.

\* \* \*

Выбираем следующую пару теоретически пересекающихся линий  $g_\alpha \cap g_\beta$  (рис.3б).

Здесь:  $g_\alpha$  - прямые образующие конуса  $\alpha$ ,

$g_\beta$  - окружности- меридианы сферы  $\beta$ :  $m_1, m_2, m_3$  (рис.5).

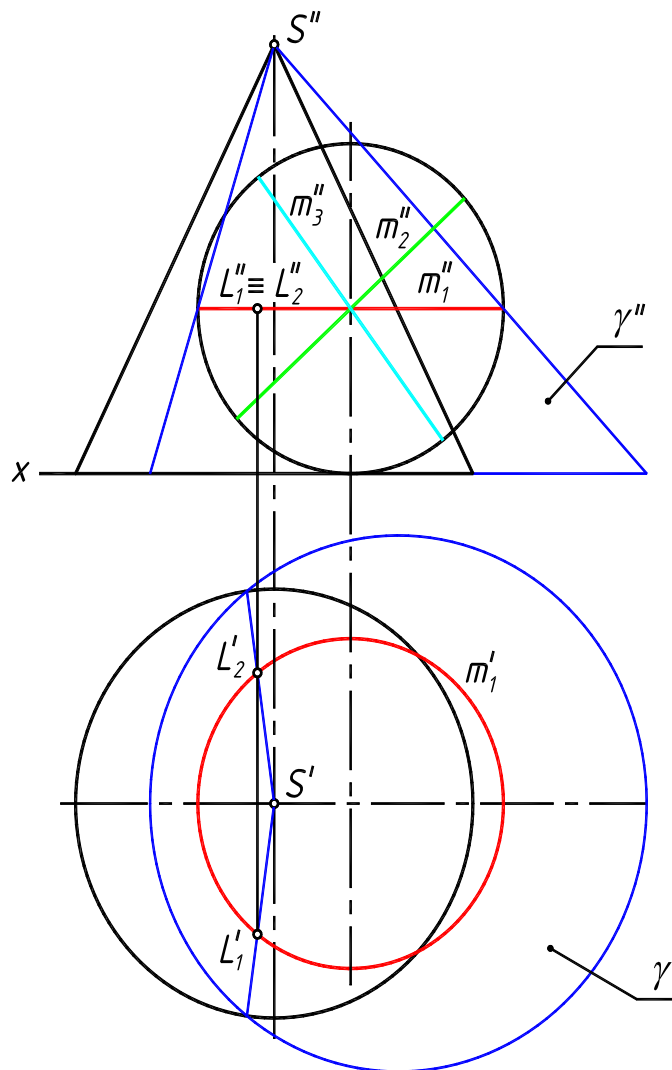


Рис.5

Этот вариант повторяет предыдущий с той лишь разницей, что меридианы – окружности одинакового диаметра. Поэтому в этом случае мы можем формировать конические поверхности, из которых удобной будет лишь одна:



направляющей этой поверхности будет меридиан  $m_1$ , т.к. в этом случае образуется конус с круговыми сечениями (рис.5).

\* \* \*

$d_\alpha \cap d_\beta$  - следующая пара теоретически пересекающихся линий (рис.3г), где  
 $d_\alpha$  - окружности конической поверхности,  
 $d_\beta$  - окружности параллелей сферы.

2. Устанавливаем особенности расположения линий в поверхностях.

$d_\alpha$  занимают положение параллельное плоскости  $\pi_1$ ,

$d_\beta$  занимают различное положение, в том числе и параллельное плоскости  $\pi_1$ .

3. а) Линии  $d_\alpha$ , параллельные плоскости  $\pi_1$ , могут пересекать линии  $d_\beta$ , параллельные плоскости  $\pi_1$ . В этом случае будет получаться ряд плоскостей-посредников, параллельных плоскости  $\pi_1$  (рис.6).

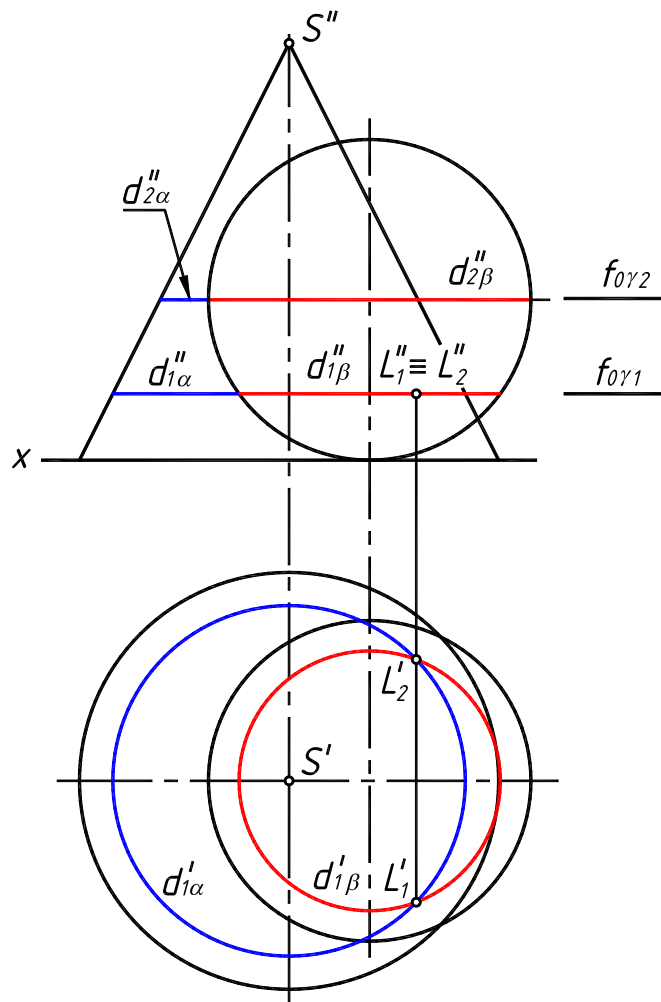


Рис.6

б) линии  $d_\alpha$ , параллельные плоскости  $\pi_1$ , могут пересекать линии  $d_\beta$ , не параллельные плоскости  $\pi_1$  (рис.7). В каждом случае оси, перпендикулярные

плоскостям окружностей  $d_\alpha$  и  $d_\beta$  пересекаются, и мы имеем ряд центров сфер.

Каждый полученный центр является центром семейства концентрических сфер (рис.7). На фронтальной проекции к плоскости параллели  $d_\beta$  проведена фронтальная проекция перпендикуляра  $n''$ , проходящего через центр ее окружности  $S_1$ . Фронтальная проекция  $n''$  пересекает проекцию  $i''$  оси конуса в точке  $O_1''$ . Точка  $O_1$  является центром семейства концентрических сфер. Параллелей разных направлений на сфере множество. Следовательно, центров семейств концентрических сфер будет также множество (рис.8).

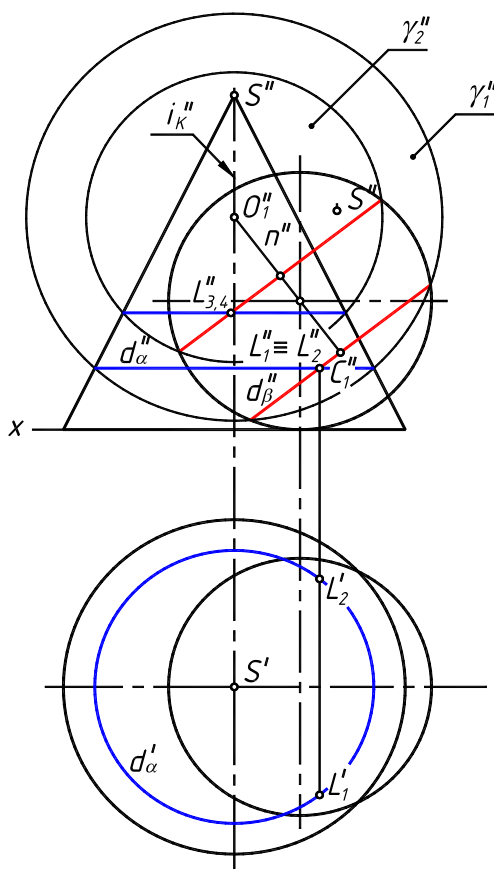


Рис.7

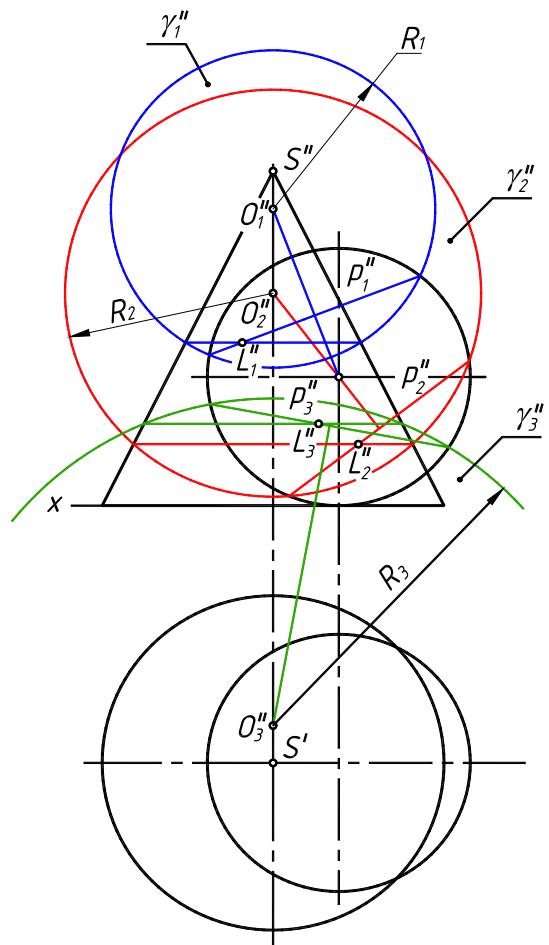


Рис.8

Каждая сфера может быть выбрана в качестве самостоятельного посредника. В этом случае мы имеем семейство концентрических сфер разного радиуса (рис.8).

$d_\alpha \cap g_\beta$  - следующая пара теоретически пересекающихся линий (рис.3г).

$d_\alpha$  - окружность конической поверхности;

$g_\beta$  - окружность-меридиан.

- Устанавливаем особенности расположения линий в поверхностях:  
 $d_\alpha$  - занимает положение, параллельное плоскости  $\pi_1$ ,  
 $g_\beta$  - занимает положение, произвольное относительно плоскостей проекций.

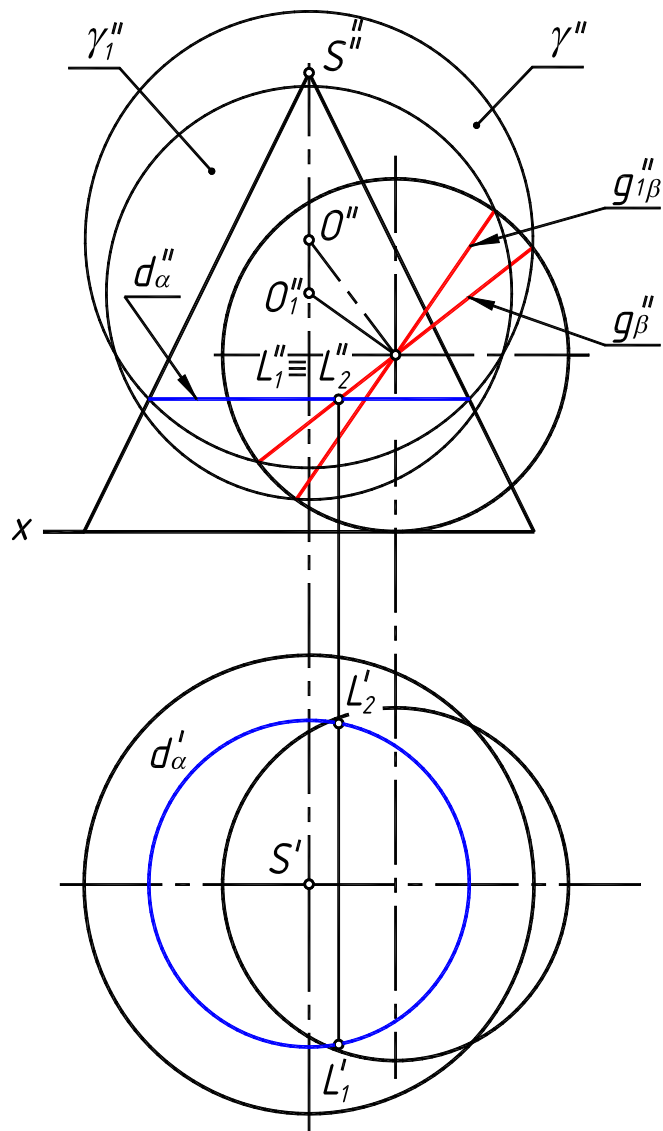


Рис.9

- $d_\alpha \parallel \pi_1$  пересекает  $g_\beta$  не параллельную  $\pi_1$  (экватор)  
В этом случае пересекающиеся линии образуют плоскость-посредник. Эта плоскость одна. Её введение даёт возможность определить характерные точки линии пересечения – точки видимости для горизонтальной проекции.
  - $d_\alpha \parallel \pi_1$  пересекает  $g_\beta$ , произвольно расположенную относительно плоскости  $\pi_1$ .  
Этот вариант повторяет предыдущий, так как меридианы – это параллели сферы, особенностью которых является то, что их центры находятся в

центре сферы, что обеспечивает одинаковый диаметр окружностей. Поэтому, как и в предыдущем случае, поверхностями-посредниками будут являться как семейства концентрических сфер, так и совокупность эксцентрических сфер (рис.7, 8, 9).

IV. Из разработанных семейств поверхностей-посредников наиболее простым для решения задачи является семейство параллельных горизонтальных плоскостей.

Усвоив развернутый состав действий, студент переходит к сокращенному, что дает ему возможность быстро сориентироваться во всевозможных вариантах посредников и выбрать удобный для решения задачи.

Процесс самостоятельного конструирования поверхностей-посредников с использованием обобщенного приема их разработки решает множество задач в формировании творческого мышления студента.

1. Студент осознает глубинную взаимосвязь между данными пересекающимися поверхностями и создаваемыми поверхностями: поверхности не появляются извне, их строение обусловлено строением пересекающихся поверхностей.
2. Студент развивает свое пространственное воображение. Самостоятельное создание поверхностей из линий – задача сложная, и требует объемного представления поверхностей.
3. Студентом для решения задачи привлекаются знания из различных разделов геометрии, что дает возможность ему лучше усваивать другие курсы.
4. Студент развивает свое логическое мышление, т.к. появляются в процессе решения задачи новые логические взаимосвязи, формирующие обобщенный подход к решению.
5. Разработка разных вариантов решения задачи, углубленное понимание процесса повышает интерес студента к изучаемому предмету.

#### Список литературы

- 1.Гордон В.О., Семенцов-Огиевский М.А. Курс начертательной геометрии: учебное пособие для вузов: - М: Высшая школа. 2008
2. Калошина И.П., Добровольская Н.А. Творческие задачи на создание дополнительных построений. – Ростов на Дону. Издательство Ростовского ун-та,1984.
3. Калошина И.П. Психология творческой деятельности – Москва. Изд-во ЮНИТИ 2008 г.
4. Пеклич В.А., Жирных Б.Г., Марков В.М. Задачи московских и российских олимпиад по начертательной геометрии. М. Изд-во Ассоциация строительных вузов.2004 г.
5. Фролов С.А. Начертательная геометрия: учебник для вузов – М.ИНРРА – 2008 г.