УДК 378.146 DOI: 10.18698/2306-8477-2020-5-685

Новый подход к изучению основных понятий линейной алгебры

© В.Ю. Чуев, И.В. Дубограй

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Предложен новый подход к изучению таких понятий линейной алгебры, как базис и размерность линейного пространства. Несколько изменен порядок введения и определения этих понятий. Данный подход является более простым и одновременно более строгим, что способствует лучшему усвоению студентами основных понятий и всего курса линейной алгебры.

Ключевые слова: *линейное пространство, базис, размерность, линейная зависимость векторов*

Введение. Линейная алгебра является одним из самых сложных разделов курса высшей математики в технических университетах, так как оперирует абстрактными понятиями. Особо важным является хорошее усвоение студентами основных понятий этой дисциплины, таких как линейная зависимость и линейная независимость системы векторов, базис и размерность линейного пространства. В настоящей статье предложен новый подход к изучению понятий базиса и размерности линейного пространства.

Анализ традиционного подхода. В традиционных учебниках по линейной алгебре для технических университетов [1, 2] понятия базиса и размерности линейного пространства излагаются следующим образом.

Базис линейного пространства определяется как упорядоченная система векторов, для которой выполняются два условия:

1) эта система линейно независима;

2) любой вектор линейного пространства может быть представлен в виде линейной комбинации векторов данной системы.

Далее, исходя из этого определения доказывается теорема 1 о том, что разложение любого вектора пространства по данному базису единственно.

Размерность линейного пространства определяется как максимальное число линейно независимых векторов этого пространства. После чего доказывается теорема 2 о том, что если линейное пространство имеет размерность n, то любая его система, содержащая n линейно независимых векторов, является базисом данного пространства.

Далее следует доказательство теоремы 3: если линейное пространство имеет базис $(\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n)$, содержащий n векторов, то его размерность равна n. При доказательстве этой теоремы необходимо показать, что любая система $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n, \overline{a}_{n+1}$, состоящая из ($n$ + 1)-го вектора данного линейного пространства, является линейно зависимой. Каждый вектор системы разлагается по базису $(\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n)$, что приводит к следующим равенствам:

$$\begin{cases} \overline{a}_1 = a_{11}\overline{e}_1 + a_{12}\overline{e}_2 + ... + a_{1n}\overline{e}_n; \\ \overline{a}_2 = a_{21}\overline{e}_1 + a_{22}\overline{e}_2 + ... + a_{2n}\overline{e}_n; \\ ..... \\ \overline{a}_n = a_{n1}\overline{e}_1 + a_{n2}\overline{e}_2 + ... + a_{nn}\overline{e}_n; \\ \overline{a}_{n+1} = a_{n+1,1}\overline{e}_1 + a_{n+1,2}\overline{e}_2 + ... + a_{n+1,n}\overline{e}_n. \end{cases}$$

Затем следует утверждение о том, что линейная зависимость системы векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n, \overline{a}_{n+1}$ эквивалентна линейной зависимости строк матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & ... & a_{n+1,n} \end{pmatrix}.$$

Это утверждается без какого-либо обоснования.

Строгое обоснование данного факта требует введения понятия изоморфизма линейных пространств и доказательства еще нескольких теорем.

Предлагаемый подход. Начнем с определения размерности линейного пространства и дадим его, как в курсе аналитической геометрии, который студенты изучали ранее.

Определение. Линейное пространство называется n-мерным, если в нем существует линейно независимая система, содержащая n векторов, а любая система, содержащая (n + 1) вектор, является линейно зависимой.

Далее введем определение базиса. Базисом n-мерного линейного пространства называется любая упорядоченная система n линейно независимых векторов этого пространства.

Таким образом, сразу устанавливается связь между понятиями базиса и размерности, а также автоматически следует тот факт, что

все базисы линейного пространства содержат одно и то же количество векторов, равное размерности этого линейного пространства.

После этого доказывается теорема о том, что любой вектор n-мерного (конечномерного) линейного пространства может быть представлен в виде линейной комбинации векторов любого его базиса, притом единственным образом. И эта теорема объединяет теоремы 1 и 2 традиционного подхода.

Для удобства дальнейших рассуждений целесообразно доказать следующую теорему.

Теорема. Если система векторов $(\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n)$ некоторого линейного пространства L линейно независима и любой вектор пространства может быть представлен как линейная комбинация этих векторов, то данная система является базисом рассматриваемого пространства, размерность которого равна n.

Доказательство. Достаточно доказать, что любая система, содержащая (n + 1) вектор рассматриваемого линейного пространства L, является линейно зависимой. Рассмотрим систему векторов $(\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n, \overline{a}_{n+1}) \in L$. Убедимся в том, что существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, обращающаяся в нуль-вектор, т. е. имеет место равенство

$$c_1\overline{a}_1 + c_2\overline{a}_2 + ... + c_n\overline{a}_n + c_{n+1}\overline{a}_{n+1} = \overline{0}, \qquad (1)$$

при условии $c_1^2 + c_2^2 + ... + c_n^2 + c_{n+1}^2 \neq 0$.

Каждый вектор $\overline{a}_i \in L, \ i = \overline{1, n+1}$ по условию теоремы может быть представлен как линейная комбинация векторов $(\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n)$:

$$\begin{aligned}
&\overline{a}_1 = a_{11}\overline{e}_1 + a_{12}\overline{e}_2 + ... + a_{1n}\overline{e}_n;\\
&\overline{a}_2 = a_{21}\overline{e}_1 + a_{22}\overline{e}_2 + ... + a_{2n}\overline{e}_n;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\overline{a}_n = a_{n1}\overline{e}_1 + a_{n2}\overline{e}_2 + ... + a_{nn}\overline{e}_n;\\
&\overline{a}_{n+1} = a_{n+1,1}\overline{e}_1 + a_{n+1,2}\overline{e}_2 + ... + a_{n+1,n}\overline{e}_n.
\end{aligned} \qquad (2)$$

После подстановки разложений (2) в равенство (1) получим линейную комбинацию векторов системы $(\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n)$, равную нуль-вектору. А так как эта система по условию является линейно независимой, все ее коэффициенты обязаны быть равными нулю. Отсюда следует, что имеет место система линейных однородных уравнений относительно коэффициентов $c_1, c_2, ..., c_n, c_{n+1}$:

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{21}c_2 + \ldots + a_{n1}c_n + a_{n+1,1}c_{n+1} = 0; \\ a_{12}c_1 + a_{22}c_2 + \ldots + a_{n2}c_n + a_{n+1,2}c_{n+1} = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}c_1 + a_{2n}c_2 + \ldots + a_{nn}c_n + a_{n+1,n}c_{n+1} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Так как в системе (3) число уравнений меньше, чем количество искомых коэффициентов, она имеет ненулевое решение, что было доказано ранее. Поэтому существует набор коэффициентов $c_1, c_2, \ldots, c_n, c_{n+1}$, таких, что $c_1^2 + c_2^2 + \ldots + c_n^2 + c_{n+1}^2 \neq 0$, и выполняется условие (1). Откуда следует, что система векторов $\left(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n, \overline{a}_{n+1}\right) \in L$ линейно зависимая.

Тогда из определений базиса и размерности линейного пространства следует, что система векторов $\left(\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n\right)$ является базисом линейного пространства L и его размерность равна n.

Заключение. Рассмотренный авторами подход к изложению понятий базиса и размерности линейного пространства является более простым и одновременно более строгим по сравнению с существующим на данный момент. Такая последовательность изучения основных понятий способствует лучшему усвоению студентами предлагаемого материала.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Линейная алгебра*. Москва, Наука, 2005, 287 с.

[2] Канатников А.Н., Крищенко А.П. *Линейная алгебра*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002, 336 с.

Статья поступила в редакцию 09.11.2020

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Чуев В.Ю., Дубограй И.В. Новый подход к изучению основных понятий линейной алгебры. *Гуманитарный вестник*, 2020, вып. 5.

http://dx.doi.org/10.18698/2306-8477-2020-5-685

Чуев Василий Юрьевич — канд. техн. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 20 научных работ в области прикладной математики. e-mail: vacilious@mail.ru

Дубограй Ирина Валерьевна — доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор ряда научных работ в области прикладной математики. e-mail: irina.dubograi@yandex.ru

A new approach to the basic concepts of linear algebra learning

© V.Yu. Chuev, I.V. Dubograi

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The article describes the new approach to the study of such concepts of linear algebra as the basis and dimension of linear space. The order of introduction and definition of these concepts has been slightly changed. This approach is simpler and at the same time more rigorous, which contributes to a better understanding of the basic concepts and the entire course of linear algebra by students.

Keywords: *linear space, basis, dimension, linearly dependent and linearly independent vector systems*

REFERENCES

[1] Ilyin V.A., Poznyak E.G. *Lineynaya algebra* [Linear algebra]. Moscow, Nauka Publ., 2005, 287 p.

[2] Kanatnikov A.N., Krishchenko A.P. *Lineynaya algebra* [Linear algebra]. Moscow, BMSTU Publ., 2002, 336 p.

Chuev V.Yu., Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. Author of over 20 research papers in the field of applied mathematics.
e-mail: vacilious@mail.ru

Dubograi I.V., Assoc. Professor, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. Author of a number of research papers in the field of applied mathematics.
e-mail: irina.dubograi@yandex.ru