

## **Использование обобщенных приемов в процессе решения олимпийских задач по начертательной геометрии**

**77-48211/475609**

**# 8, август 2012**

**Добровольская Н. А., Жирных Б. Г.**

УДК 514.18

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

[alexbaev@mail.ru](mailto:alexbaev@mail.ru)

Современная психолого-педагогическая наука выдвигает в качестве актуальных целей обучения формирование у студентов обобщенных приемов решения разных видов задач определенного класса. В начертательной геометрии классом, включающим разные виды задач, являются задачи на построение линии пересечения двух поверхностей (общий случай: две пересекающиеся поверхности занимают произвольное положение).

Выбор поверхностей-посредников для построения линии пересечения двух поверхностей в общем случае является основной частью решения задачи.

Во всех учебниках начертательной геометрии рекомендуется выбирать посредники, которые пересекали бы исходные поверхности по простым линиям. Помощь в выборе посредников предлагается в виде определенных семейств поверхностей, используемых для построения линии пересечения в каждом конкретном случае. Например, в качестве посредников предлагается семейство плоскостей или семейства концентрических или эксцентрических сфер.

На практике студент, перебирая известные поверхности, путём проб и ошибок не всегда приходит к правильному решению.

Но можно подойти более обобщённо к решению этой задачи: не перебирать поверхности, а конструировать посредники самостоятельно.

Ниже предлагается сокращённый состав действий, который может быть усвоен как алгоритм решения задачи без пропуска логических звеньев и осознания всех взаимосвязей между поверхностями-посредниками и данными пересекающимися поверхностями только после изучения развернутого состава действий, изложенного в [6].

Точки линии пересечения получают при пересечении двух выделенных с помощью ряда посредников линий в пересекающихся поверхностях. Но эти две пересекающиеся линии принадлежат одновременно и поверхности-посреднику, являясь геометрическими элементами его формы. Поэтому, можно рассматривать решение этой задачи в следующей последовательности (сокращенный состав действий):

---

---

1. Выделить в каждой исходной поверхности семейства простейших линий: прямых или окружностей.
2. Создать из выделенных линий пары теоретически пересекающихся линий.
3. Сформировать разные формы поверхностей-посредников из выделенных пар линий.
4. Выбрать наиболее удобные поверхности для решения задачи.

Рассмотрим те возможности, которые даёт предлагаемый способ конструирования поверхностей-посредников при решении студентами олимпийских задач (рис. 1).

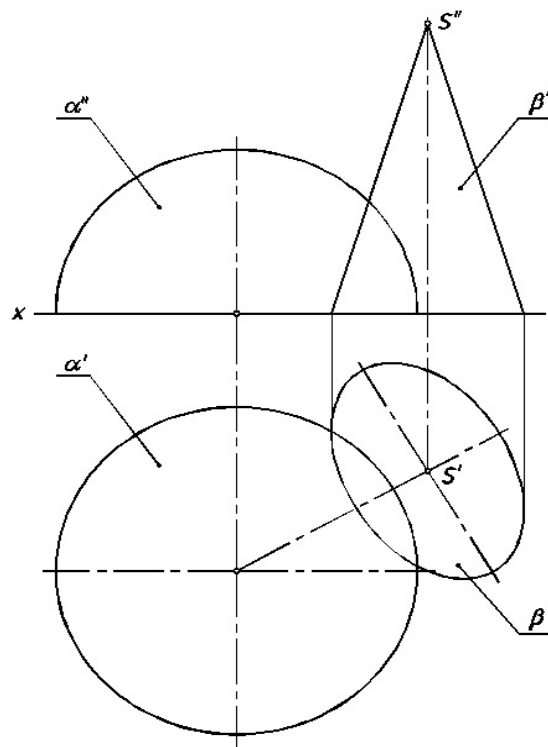


Рис. 1

Дано:

- $\alpha$  - поверхность полусферы,
- $\beta$  - поверхность эллиптического конуса.

Требуется сформировать поверхности-посредники, приводящие к построению линии пересечения данных поверхностей.

Используем сокращённый состав действий, согласно которому:

1. Выделяем в каждой исходной поверхности семейства простейших линий (прямых и окружностей).
  - а) Поверхность полусферы включает семейства окружностей  $p_{сф}$ .
  - б) Поверхность эллиптического конуса включает прямые образующие  $g_k$ , проходящие через вершину конуса и окружности а и б (Рис. 2).

Выделить семейства окружностей  $a$  и  $b$  на поверхности конуса можно, используя известную теорему о двойном касании поверхностей 2-го порядка, которая формулируется следующим образом: «если две поверхности 2-го порядка имеют касание в двух точках, то линия их пересечения распадается на две кривые второго порядка, плоскости которых проходят через прямую, соединяющую точки касания».

Если одной из поверхностей 2-го порядка является сфера, то, очевидно, линиями пересечения будут окружности (рис. 2).

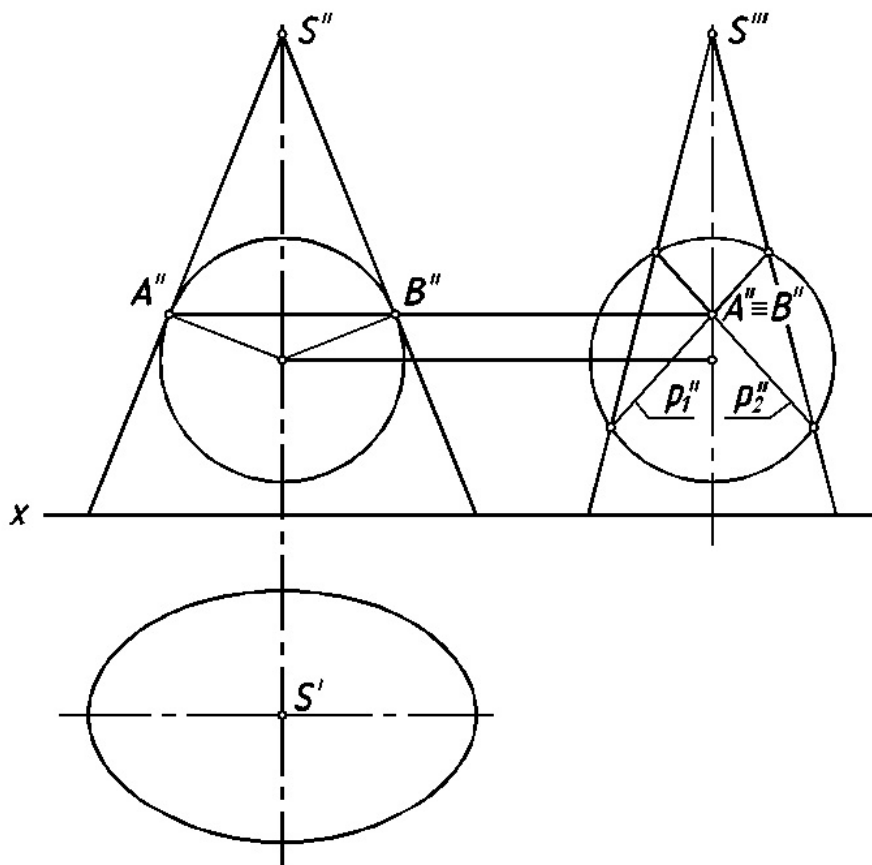


Рис. 2

2. Создаём из выделенных простых линий пары теоретически пересекающихся линий:  $g_k \cap p_{сф}$  и  $p_{сф} \cap p_k$ .
3. Формируем поверхности-посредники из выделенных пар линий.

Возьмём пару  $g_k \cap p_{сф}$ .

Сфера содержит множество окружностей, плоскости которых наклонены к плоскостям проекций под различными углами.

а) Рассмотрим вариант, когда окружности сферы параллельны горизонтальной плоскости проекций  $\pi_1$ .

В этом случае окружности сферы и пересекающие их прямые, проходящие через точку  $S$ , образуют конические поверхности  $\gamma$  с круговыми сечениями, параллельными плоскости  $\pi_1$ . Строим поверхность-посредник  $\gamma$  (рис. 3).

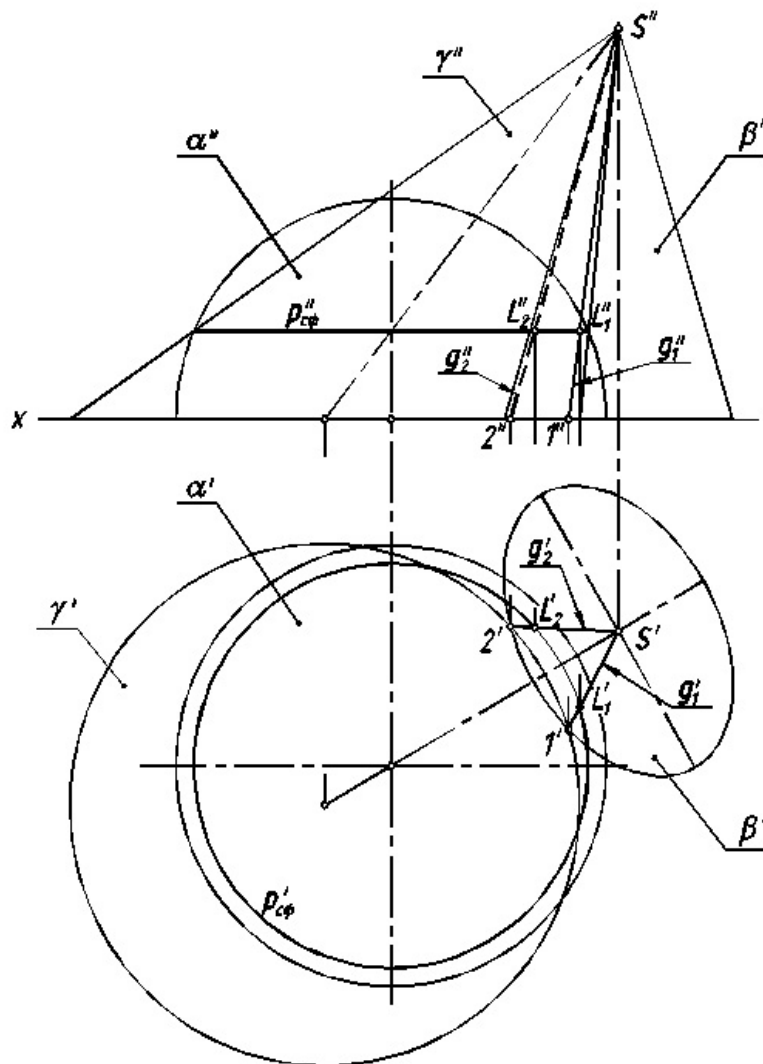


Рис. 3

Выделяем параллель сферы  $p_{сф}$ . Через вершину конуса  $S$  проводим очерковые образующие поверхности-посредника  $\gamma$  (конус с круговыми сечениями).

Основание конуса  $\gamma$  пересекает основание конуса  $\beta$  в точках 1 и 2. Через эти точки проходят образующие  $g_1$  и  $g_2$ , по которым конус  $\gamma$  пересекает конус  $\beta$ . Точки  $L_1$  и  $L_2$ , в которых образующие  $g_1$  и  $g_2$  пересекают окружность  $p_{сф}$ , являются общими для поверхностей  $\alpha$  и  $\beta$ , т.е. принадлежат линии их пересечения. Введя ряд таких поверхностей-посредников, получаем необходимое количество точек для построения линии пересечения.

б) Рассмотрим вариант, когда плоскости полуокружности сферы занимают произвольное положение и перпендикулярны плоскости  $\pi_1$ . В этом случае плоскости

произвольных полуокружностей могут проходить через ось конуса  $i_k$ , перпендикулярно плоскости  $\pi_1$  (рис.4).

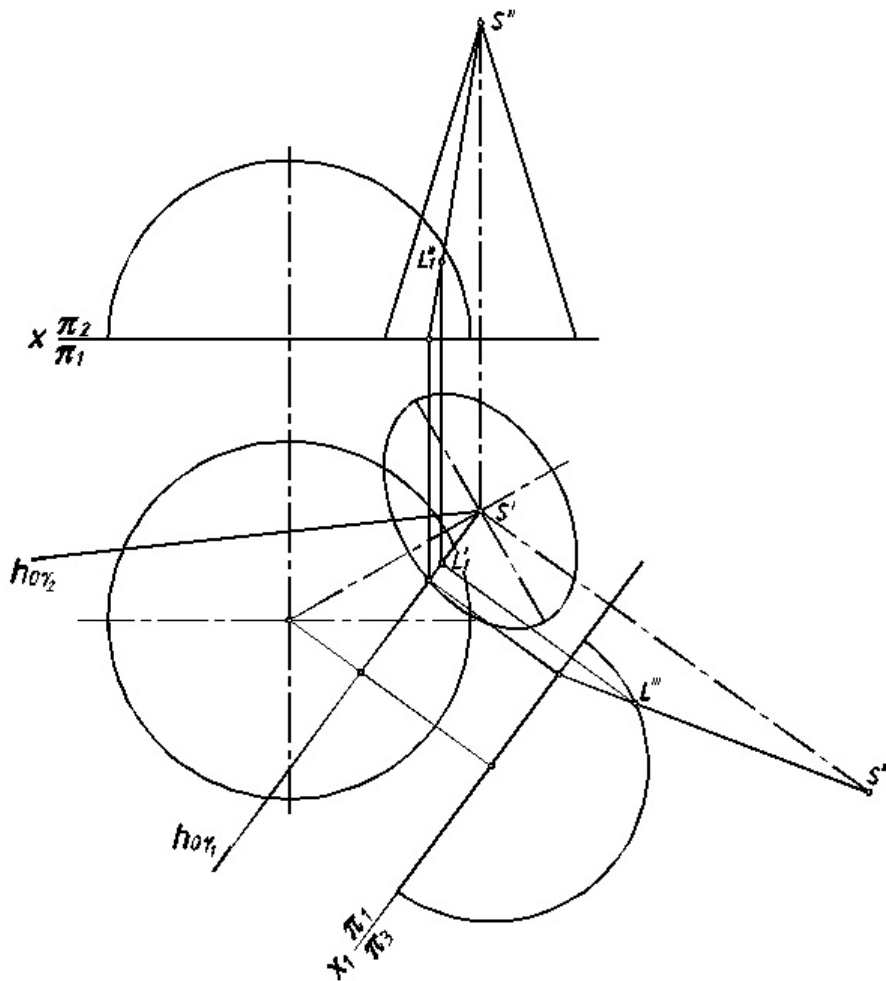


Рис. 4

В этом случае мы будем иметь пучок горизонтально - проецирующих плоскостей, проходящих через ось конуса и пересекающих сферу по окружностям, а конус – по образующим. Плоскости- посредники  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  на чертеже (рис.4) заданы горизонтальными следами  $h_0\gamma_1$  и  $h_0\gamma_2$ .

Чтобы построить точки линии пересечения нужно способом замены плоскостей проекций поставить каждую плоскость-посредник в удобное положение, когда изображение будет проецироваться в истинную величину (рис.4). Так нужно поступить с каждым посредником.

б) Рассмотрим следующую пару выделенных на исходных поверхностях линий  $p_{сф} \cap a$  (рис.5).

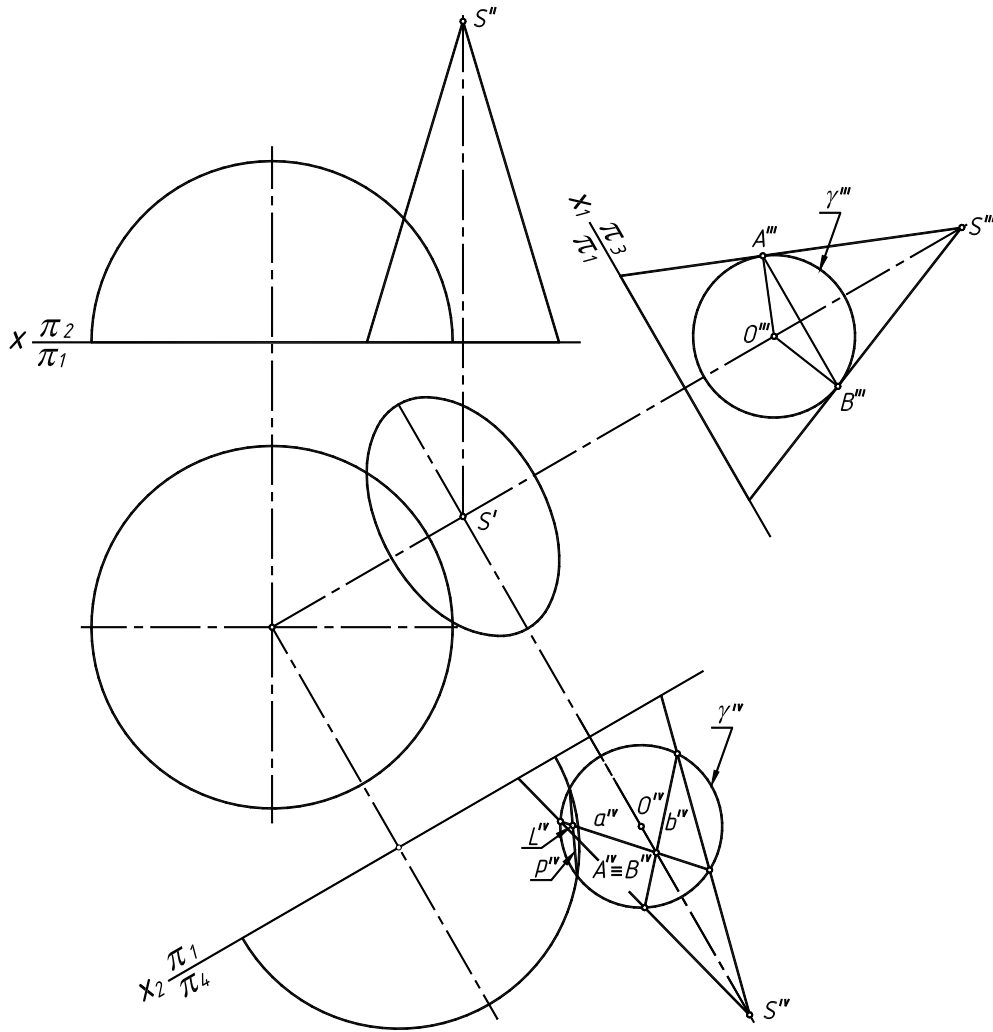


Рис. 5

Чтобы получить на конусе окружности  $a$ , произведём две замены плоскостей проекций:

- заменяем плоскость  $\pi_2$  на  $\pi_3$  и вводим касательную сферу  $\gamma$  ;
- заменяем плоскость  $\pi_2$  на  $\pi_4$  , где получаем линии пересечения  $\gamma$  с  $\beta$  (окружности  $a$  и  $b$ ).

Сфера  $\gamma$  пересекает сферу  $\alpha$  по окружности  $p$ . Окружности  $a$  и  $p$  принадлежат одной сфере и пересекаются в точках  $L_1$  и  $L_2$  .

Вводя ряд таких поверхностей-посредников, можно получить множество точек линии пересечения.

Очевидно, что введение конических посредников более простой способ решения задачи.

Но, если студент на олимпиаде может представить не только решение трудной задачи, но и несколько вариантов, то это говорит о творческом подходе к решению задачи и глубоком знании предмета.

## Список литературы

1. Гордон В.О., Семенцов-Огиевский М.А. Курс начертательной геометрии: учебное пособие для вузов: - М: Высшая школа. 2008
  2. Колошина И.П., Добровольская Н.А. Творческие задачи на создание дополнительных построений. – Ростов на Дону. Издательство Ростовского университета, 1984.
  3. Колошина И.П. Психология творческой деятельности – Москва. Изд-во ЮНИТИ 2008 г.
  4. Пеклич В.А., Жирных Б.Г., Марков В.М. Задачи московских и российских олимпиад по начертательной геометрии. М. Изд-во Ассоциация строительных вузов. 2004 г.
  5. Фролов С.А. Начертательная геометрия: учебник для вузов – М.ИНРРА – 2008 г.
  6. Добровольская Н.А., Жирных Б.Г. Формирование поверхностей-посредников при построении линии пересечения двух поверхностей. Пособие-  
<http://technomaq.edu.ru/>. <http://hoster.bmstu.ru/-rk1/>. 2010 URL://  
<http://technomaq.edu.ru/doc/143237.html>(дата обращения 14.06.2011.)
-