УДК 514(075) DOI: 10.18698/2306-8477-2019-2-589

Многомерная геометрия и абстрактные пространства в структуре знаний современного инженера

© Л.С. Соколова

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассмотрены содержание и использование в инженерном образовании понятий евклидова многомерного пространства и n-мерной наглядной геометрии. Представлены основные понятия многомерной геометрии: размерность пространства, степени свободы подпространств и параметрические свойства объектов. Приведены примеры использования понятия многомерного пространства в общеинженерных дисциплинах. Анализ примеров показывает, что приведенные выше основные понятия многомерной геометрии, такие как размерность пространства, степени свободы подпространств и параметризация геометрических фигур и условий, изучаются в общеинженерных дисциплинах высших учебных технических заведений в применениях к конкретным наукам и входят в структуру знаний современного инженера. Представленный материал объясняет, как именно в технике нашло применение понятия абстрактного пространства. Пустого абстрактного пространства не бывает. Разнообразию возможных совокупностей объектов, заполняющих пространство, и различных отношений между ними в технике отвечает неограниченное разнообразие пространств.

Ключевые слова: *евклидово многомерное пространство, наглядная многомерная геометрия, общеинженерные дисциплины*

Введение. В результате обобщения понятия пространства термин «пространство» получил в науке два значения: с одной стороны, это обычное реальное пространство — универсальная форма существования материи, с другой стороны, это абстрактное пространство — совокупность однородных объектов (явлений, состояний и т. п.), в котором имеются пространственно-подобные отношения [1].

В реальном пространстве не существует представления о пространстве «самом по себе», пространстве без материи, так как «абсолютно» пустое пространство превращается в ничто. Пустого абстрактного пространства также не бывает. Разнообразию возможных совокупностей объектов и различных отношений между ними отвечает неограниченное разнообразие пространств.

Принятое в современной геометрии определение понятия пространства и фигуры исходит из понятия множества. Пространство определяется как множество каких-либо элементов (точек) с условием, что в этом множестве установлены некоторые соотношения, сходные с обычными пространственными отношениями. Фигура определяется как произвольное множество точек в одном пространстве.

Пространство оказывается евклидовым с достаточной точностью в областях, малых в сравнении с космическими масштабами. Вся техника, поскольку в ней фигурируют формы и размеры тел, пользуется евклидовой геометрией, дополненной декартовой системой координат. Поэтому пространства космического масштаба и другие неевклидовые, а тем более реальное физическое пространство в данной работе не рассматриваются.

Понятие многомерного пространства. Общее реальное основание для введения понятия многомерного пространства базируется на том положении, что если какая-либо фигура или состояние какой-либо системы задается n данными, то эту фигуру или это состояние можно представить как точку некоторого n-мерного пространства. Таким образом, множество всех точек M (X_1, X_2, ..., X_n) при всевозможных действительных значениях координат называют n-мерным пространством. Фигура в n-мерном пространстве — это геометрическое место или множество точек, удовлетворяющих тем или иным условиям. Например, n-мерный шар определяется как множество точек, удаленных от данной точки не далее, чем на заданное расстояние R.

Абстрактность понятия многомерного пространства подчеркивается тем, что в n-мерной геометрии все подпространства принято называть плоскостями с указанием их размерности. Например, точка — это 0-плоскость с размерностью 0; прямая — это 1-плоскость с размерностью 1; обычная плоскость — это 2-плоскость с размерностью 2; трехмерное пространство — это 3-плоскость с размерностью 3 и т. п. При этом каждая p-плоскость, где $p < n$, определяется заданием (p + 1) точки и полностью принадлежит n-плоскости (n-мерному пространству). Эти p-плоскости называются линейными подпространствами многомерного (n-мерного) пространства.

Наиболее широкое применение понятие абстрактного пространства находит в самой геометрии. Геометрия многомерного пространства строилась сначала путем формального обобщения обычной аналитической геометрии на произвольное число измерений. Геометрический подход к изложению n-мерной геометрии разработан Шлефли на примере правильных многогранников многомерного пространства и обобщен сам геометрический метод исследования вне зависимости от аналитического аппарата, что придало ему реальную наглядность.

Выведено математическое определение абстрактного n-мерного декартового пространства, которое обозначается как R^n. Число n называется размерностью пространства или числом измерений и соответствует числу *независимых координат.* Таким образом, простейшими геометрическими фигурами размерностей 0, 1, 2, 3, 4 являются соответственно точка (R^0), отрезок (R^1), треугольник (R^2), тетраэдр (R^3), четырехмерный симплекс (R^4). Этот подход в наиболее полной мере отвечает понятию наглядности в многомерной геометрии. Это делает ее более доступной для понимания при изучении [2, 3].

Многомерная геометрия естественным образом объединяет в себе такие понятия, как размерность пространства, степени свободы и параметры геометрической фигуры. Размерностью пространства в математике называют число независимых координат, в механике — число степеней свободы, в конструктивной геометрии — число независимых параметров. Тогда, принимая точку за основной элемент пространства, говорят, что на прямой (одномерное пространство) точка определяется заданием одной координаты, имеет одну степень свободы и один параметр; на плоскости (двумерное пространство) — двумя координатами, двумя степенями свободы и двумя параметрами; в трехмерном пространстве — тремя координатами, тремя степенями свободы и тремя параметрами и т. п.

Использование многомерной геометрии в общеинженерных дисциплинах, изучаемых во втузах. В ***инженерной геометрии*** при решении прикладных задач определяют для i подпространств размерность вмещающего (содержащего) их пространства (n) и пространства пересечения (r). Например, для двух подпространств размерностями p_1 и p_2 расчеты ведут по известным формулам соответственно [4]:

$$n = p_1 + p_2 + 1; \tag{1}$$

$$r = p_1 + p_2 - n. \tag{2}$$

При анализе взаимного положения двух линейных подпространств могут иметь место следующие случаи.

1. Две прямые ($p_1 = p_2 = 1$):

а) *не имеющие общих точек* — принадлежат, согласно (1), вмещающему их пространству минимальной размерности $n = 1 + 1 + 1 = 3$;

б) *пересекающиеся в точке* ($r = 0$) — принадлежат, согласно (2), вмещающему их пространству минимальной размерности $0 = 1 + 1 - n$; $n = 2$.

2. Прямая и плоскость ($p_1 = 1$; $p_2 = 2$):

а) *не имеющие общих точек* — принадлежат вмещающему их пространству минимальной размерности $n = 1 + 2 + 1 = 4$;

б) *пересекающиеся в трехмерном пространстве* ($n = 3$) — определяют пространство пересечения размерности $r = 1 + 2 - 3 = 0$ (точка).

3. Две плоскости ($p_1 = p_2 = 2$):

а) *не имеющие общих точек* – принадлежат вмещающему их пространству минимальной размерности $n = 2 + 2 + 1 = 5$;

б) *пересекающиеся в трехмерном пространстве* (n = 3) — определяют пространство пересечения размерности $r = 2 + 2 - 3 = 1$ (прямая);

в) *пересекающиеся в четырехмерном пространстве* (n = 4) — определяют пространство пересечения размерности $r = 2 + 2 - 4 = 0$ (точка).

Для сравнения: размерность пространства пересечения трех (i = 3) плоскостей ($p_1 = p_2 = p_3$) в трехмерном пространстве (n = 3) определится как $r = p_1 + p_2 + p_3 - n\,(i - 1)$, т. е. $r = 2 + 2 + 2 - 3\,(3 - 1) = 0$ (точка).

4. Два трехмерных пространства ($p_1 = p_2 = 3$):

а) *не имеющие общих точек* — принадлежат вмещающему их пространству минимальной размерности $n = 3 + 3 + 1 = 7$;

б) *в четырехмерном пространстве* (n = 4) пересекаются по плоскости, так как $r = 3 + 3 - 4 = 2$ (плоскость).

5. Прямая (p_1 = 1), плоскость (p_2 = 2) и трехмерное пространство (p_3 = 3) не имеют общих точек, т. е. будут скрещивающимися, если принадлежат пространству, размерность n которого не ниже $n = 1 + 2 + 3 + 3 - 1 = 8$.

6. В шестимерном пространстве (n = 6) 2-плоскость (p_1 = 2) и 3-плоскость (p_2 = 3) являются скрещивающимися, так как размерность r пространства пересечения отрицательная, $r = 2 + 3 - 6 = -1$.

На основе использования в геометрии понятия многомерного расширенного евклидова пространства и идей исчислительной геометрии была создана параметрическая геометрия для решения вопросов задания, конструирования и исследования геометрических образов, а также явлений и процессов [5–7]. В прикладной геометрии в связи с развитием вычислительной техники в настоящее время наблюдается повышение интереса к идеям параметрической геометрии.

Метод подсчета параметров — параметризация — широко применяется в физике, механике, математике и других областях науки и техники. Под параметражом геометрических фигур понимают способы, процесс и результат подсчета числа независимых параметров, определяющих фигуру по форме и положению ее в пространстве среди множества соответствующих фигур.

Известна формула для определения общего числа независимых параметров, т. е. параметрического числа — числа условий P, требуемых для определения линейных пространств: прямых, плоскостей, p-плоскостей в n-пространстве [4]:

$$P = (n - p)(p + 1). \tag{3}$$

Согласно (3), параметрическое число P прямой (p = 1), принадлежащей плоскости (n = 2), равно $(2 - 1)(1 + 1) = 2$, а принадлежащей трехмерному пространству (n = 3) равно $(3 - 1)(1 + 1) = 4$. Если прямая принадлежит пятимерному пространству, то $P = (5 - 1)(1 + 1) = 8$.

Если на плоскость наложены дополнительные условия, например, она проходит через $(r + 1)$ фиксированную точку, тогда ее параметрическое число определится по формуле

$$P = (n - p)(p - r). \qquad (4)$$

Например, множество прямых ($p = 1$) плоскости ($n = 2$), проходящих через точку ($r = 0$), составляет пучок, т. е. однопараметрическое множество, и, согласно (4), $P = (2 - 1)(1 - 0) = 1$. Множество плоскостей ($p = 2$) трехмерного пространства ($n = 3$), проходящих через точку ($r = 0$), составляет связку, и $P = (3 - 2)(2 - 0) = 2$.

Для того чтобы задать некую окружность на плоскости, необходимо задать три ее параметра: радиус и две координаты ее центра, т. е. $P = 3$. Если таких окружностей, например, три ($N = 3$), то необходимо задать $P = 3N$ параметров, т. е. $P = 3 \cdot 3 = 9$ независимых параметров. Это определит размерность n операционного пространства для их размещения, равную $n = P$, т. е. $n = 9$ (9-мерное пространство). Для задания шара необходимо задать его радиус и три координаты центра, всего четыре независимых параметра. Тогда для трех независимых шаров ($N = 3$) потребуется задать $P = 4 \cdot 3 = 12$ независимых параметров. Размерность n операционного пространства для их размещения, равная числу независимых параметров P, составит $n = 12$ (12-мерное пространство).

В учебном курсе ***теоретической механики*** изучается обычное механическое движение твердых тел в евклидовом пространстве, дополненном тремя декартовыми координатами. При задании движения твердого тела в механике его положение в пространстве считают определенным, если известно положение трех его базисных точек, не лежащих на одной прямой и неизменно связанных с телом. Поскольку на девять координат этих трех точек наложено три ограничения, выражающих неизменность расстояния между точками, то число независимых координат, задающих положение свободного тела в пространстве, а значит, и число степеней его свободы равно шести. Движение такого тела может быть всегда представлено как вращение вокруг и перемещение вдоль трех произвольно выбранных взаимно перпендикулярных осей.

В общем случае движения твердого тела можно говорить об абстрактном шестимерном пространстве R^6 как о пространстве размерностью $n = 6$, где может осуществляться это движение. Фиксируя некоторые координаты, можно воспроизводить различные частные случаи движения тела с меньшим числом степеней свободы, т. е. в пространстве меньшей размерности. Другим вариантом сокращения числа степеней свободы движения твердого тела является установление какой-либо функциональной зависимости между двумя или несколькими обобщенными координатами. Использование современного числового программного управления позволяет организовать движение тела (например, режущего инструмента) по заданной траектории, т. е. в абстрактном одномерном пространстве многокоординатного станка (рис. 1).

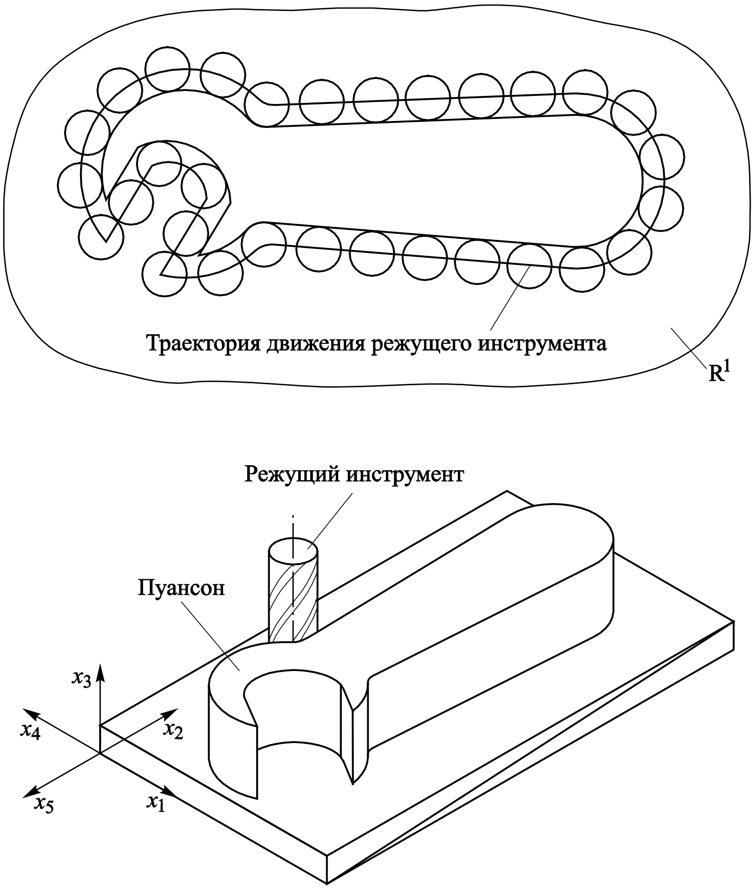


Рис. 1. Обработка пуансона на 5-координатном станке с числовым программным управлением. Размерность операционного пространства $n = 1$, т. е. это пространство является одномерным (R^1)

Идеи многомерной геометрии нашли применение и в курсе такой общеинженерной дисциплины, как **«*Теория механизмов и машин*»**. В применении к конкретным механизмам общие методы используются также в курсах «Детали машин», «Детали приборов». Они основаны на тех закономерностях в структуре (строении) самых различных механизмов, которые связывают число степеней свободы (обозначаемое как W) механизма с числом звеньев и числом и видом его кинематических пар [8]. Эта величина W и будет определять размерность операционного пространства, т. е. пространства, в котором изучается созданный механизм. Таким образом, размерность операционного пространства зависит только от содержания этого пространства, т. е. от размерности конструкции содержащегося в этом пространстве механизма.

Рассмотрим конкретную задачу, решаемую в робототехнике при проектировании и управлении промышленными роботами. Задача заимствована из [8, рис. 24.2].

В процессе выполнения операции с объектами в большинстве случаев манипуляторы имитируют движение рук человека. Поэтому структурная схема манипулятора должна обладать кинематическими характеристиками, аналогичными характеристикам руки человека (рис. 2).

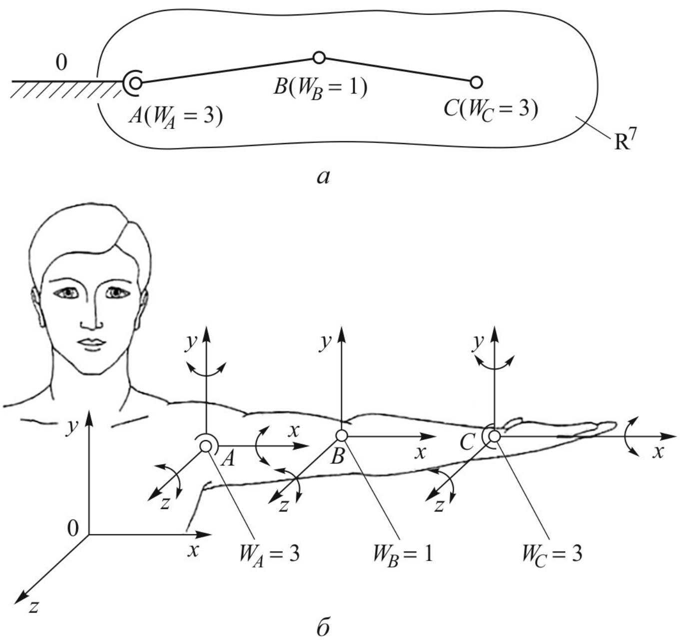


Рис. 2. Структурная схема (*а*) промышленного робота, имитирующего движение рук человека (*б*). Размерность операционного пространства, содержащего данный механизм, $W = 7$ (соответствует 7-мерному пространству R^7)

Подвижности, имеющиеся у руки человека (без учета подвижности пальцев), можно обеспечить с помощью пространственной кинематической цепи, состоящей из $N = 3$ звеньев: звено A с подвижностью $W_A = 3$; звено B — с $W_B = 1$; звено C — с $W_C = 3$. Тогда число степеней свободы данного пространственного механизма (W) определяется как

$$W = W_A + W_B + W_C = 3 + 1 + 3 = 7.$$

Размерность операционного пространства, содержащего исследуемый механизм, согласно представлениям многомерной геометрии, равна числу независимых координат механизма, т. е. числу независимых степеней свободы. Поэтому размерность рассматриваемого пространства R^n равна $n = W = 7$ и зависит только от конструкции механизма. С учетом всех звеньев и в самой кисти имели бы $W = 27$, т. е. абстрактное операционное пространство R^{27} с 27 степенями свободы. Такое многомерное пространство становится вполне наглядным исходя из схемы конструкции и логики ее создания, а также представлений многомерной геометрии (см. рис. 2).

Еще один пример, уже из области ***метрологии*** [9].

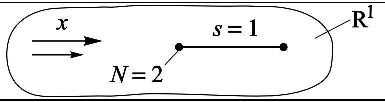
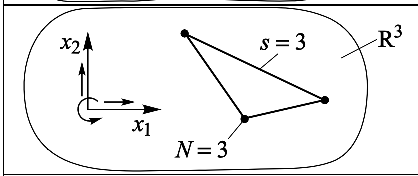
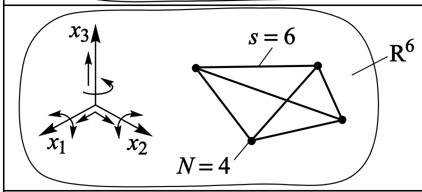
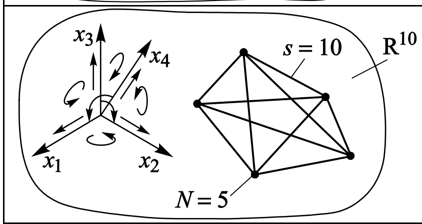
Если ранее измерение и контроль трехмерных объектов основывался на измерении сечений, то сегодня многие доступные CAD-системы и системы анализа предоставляют интерфейс для массива точек, содержащего, например, до $N = 1\ 300\ 000$ точек, который служит выходными данными систем оцифровки. Современные контрольно-измерительные машины измеряют одновременно в трех декартовых координатах, а технология сканирования позволяет за один раз захватывать 1000 и более точек. В этом методе измерения и контроля первоисточником является **трехмерная электронная модель объекта**.

Таким образом, размерность пространства контролируемой поверхности изделия дает представление о $P = 3N$-мерном абстрактном пространстве R^{3N}, где N может достигать 1 300 000 контролируемых точек. Данные могут быть представлены в виде таблиц, диаграмм, графиков с визуальным показом положения и значений отклонений всех независимых координат. Наглядность представленного такого многомерного контролируемого пространства совершенно очевидна.

Абстрактное пространство может даже мало походить на обычное пространство. Известно, что в кинетической теории газов рассматривают абстрактные, так называемые ***фазовые пространства*** системы материальных точек — молекул газа (пример из [1]). Движение одной частицы в каждый момент определяется ее положением и скоростью, что дает всего шесть величин: три координаты и три составляющие скорости (по трем осям координат). Состояние N частиц задается $6N$ величинами, и так как молекул много, то $6N$ — огромное число. Тем не менее физики говорят о $6N$-мерном фазовом пространстве системы молекул. Точка в этом пространстве изображает состояние всей массы молекул с их координатами и скоростями. Движение точки изображает изменение состояния.

Анализ приведенных выше примеров показывает, что такие основные понятия многомерной геометрии, как размерность пространств, число степеней свободы и параметризация геометрических фигур и условий, давно известны и, естественно, изучаются в общеинженерных дисциплинах втузов в применении к конкретным наукам. Это позволяет на обобщающем примере из геометрии показать, как получаются наглядные изображения многомерного евклидова пространства R^P разной размерности (P).

Рассмотрим твердое тело в системе n декартовых координат x_n и рассчитаем размерность операционного пространства R^P. Результаты расчета и наглядные изображения приведены в таблице:

Твердое тело в системе n декартовых координат x_n	R^P	Расчет по формуле $P = nN - s$		
		P	Параметраж твердого тела	Движение твердого тела
	R^1	1	$n = 1$, $N = 2$, $s = 1$, $P = 1 \cdot 2 - 1 = 1$	Одно поступательное вдоль оси
	R^3	3	$n = 2$, $N = 3$, $s = 3$, $P = 2 \cdot 3 - 3 = 3$	Два поступательных вдоль двух осей + одно вращение вокруг точки
	R^6	6	$n = 3$, $N = 4$, $s = 6$, $P = 3 \cdot 4 - 6 = 6$	Три поступательных вдоль трех осей + три вращения вокруг трех осей
	R^{10}	10	$n = 4$, $N = 5$, $s = 10$, $P = 4 \cdot 5 - 10 =$ $= 10$	Четыре поступательных вдоль четырех осей + шесть вращений вокруг шести плоскостей

Твердым телом или неизменяемой системой называют такую механическую систему, которая состоит из множества материальных точек, заполняющих сплошным образом некоторую часть пространства. Основным свойством твердого тела является неизменность расстояний между любыми двумя точками. Движение такого тела возможно только в евклидовом пространстве.

Точка в многомерном пространстве определяется n декартовыми координатами $x_1, x_2, ..., x_n$. В таблице представлены четыре координатные системы с декартовыми координатами x_1; x_1, x_2; x_1, x_2, x_3; x_1, x_2, x_3, x_4. Поскольку в n-мерной геометрии число точек, задающих p-плоскость в системе с n координатами, принимают на единицу больше числа координат (n), число базисных точек твердого тела $N = n + 1$.

Параметраж геометрической фигуры в данном случае позволяет прямым подсчетом выявить число наложенных на систему геометрических связей (s) и определить тем самым число независимых между собой параметров среди общего числа параметров, равного nN. Это число независимых параметров (за вычетом геометрических связей) определяет и размерность пространства, и число степеней свободы (P), и параметрическое число данного пространства, согласно универсальной зависимости $P = nN - s$ (см. таблицу).

Размерность абстрактного пространства R^P равна числу существующих в нем независимых параметров (P), являющихся его координатами. В механике таким независимым координатам соответствует число степеней свободы, т. е. число независимых между собой возможных перемещений. Из таблицы видно, сколько и каких перемещений может осуществляться в рассматриваемых четырех системах координат. Таким образом, многомерное евклидово пространство может быть наглядно изображено и доступно для понимания, исходя из логики его образования и простых понятий многомерной геометрии.

Заключение. Представленный материал показывает, как именно в технике нашло применение понятие абстрактного пространства. Абстрактное пространство — это не пустое пространство, а то, что в нем содержится, т. е. его наполнение разным содержанием. Содержание абстрактного пространства в инженерной практике — это разного рода конструкции, разные формы взаимодействующих объектов, их перемещения, т. е. вполне реальные действия, а не экзотическая игра ума.

Очень важным представляется мнение академика А.Д. Александрова [1], который отмечает, что «...до студентов должна быть доведена идея о том, что понятие абстрактного пространства имеет вполне реальное основание, оно отражает действительность и было вызвано потребностями науки, а не праздной игрой воображения...» И, как видим, доведено до технических применений.

Такой подход позволяет поставить вопрос о целесообразности использования наглядной многомерной геометрии в общеинженерном техническом образовании в качестве составляющей **междисциплинарного базового курса.** Это дает полное основание для введения в программы кафедр инженерной графики пропедевтического курса наглядной многомерной геометрии в **составе** предлагаемой дисциплины «Наглядная инженерная геометрия» [10, 11]. При таком подходе кафедры инженерной графики смогут сохранить **геометрию** в качестве научного направления в своей деятельности в условиях перехода на современные информационные технологии, когда создание электронной модели заменяет собой создание чертежа.

В [3] рассмотрены примеры, показывающие возможность совместного выстраивания наглядной геометрии и понятия многомерного пространства в учебной программе по геометрической подготовке студентов.

Обновление программ по геометро-графической подготовке для бакалавриата технического университета в предложенном виде, наряду с переходом на 3D-моделирование [12], обеспечит междисциплинарные связи не только с кафедрами профессиональной подготовки, но и с кафедрами общеинженерных дисциплин, а также межвузовские связи. Это отвечает ведущим тенденциям в потребности инженерной подготовки и встраиванию предметного обучения в компетентностную модель подготовки будущего инженера.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Александров А.Д. Геометрия. *Большая советская энциклопедия*. Москва, Советская энциклопедия, 1971, т. 6, с. 307–313.

[2] Соколова Л.С. О наглядности в инженерной геометрии. *Проблемы качества графической подготовки студентов в техническом вузе: традиции и инновации*. Пермь, 2017, с. 138–147. URL: http://dgng.pstu.ru/conf2017/

[3] Соколова Л.С. Многомерное пространство и наглядная геометрия в учебной программе по геометрической подготовке для бакалавриата. *Геометрия и графика*, 2015, т. 3, вып. 1, с. 40–46.

[4] Иванов Г.С. *Теоретические основы начертательной геометрии*. Москва, 1998, гл. 4, с. 58–76.

[5] Волков В.Я., Юрков В.Ю. Многомерная исчислительная геометрия: основные задачи. *Вестник Сибирской автомобильно-дорожной академии* (СибАДИ), 2005, вып. 3, с. 54–59.

[6] Гершман И.П. Многопараметрические множества геометрических фигур и их координатные подмножества. Сб. *Прикладная геометрия*. Москва, РУДН им. П. Лумумбы, 1971, с. 41–59.

[7] Рыжов Н.Н. *Параметрическая геометрия*. Москва, МАДИ, 1988, 56 с.

[8] Тимофеев Г.А. *Теория механизмов и машин: учебное пособие. Базовый курс для бакалавров*. Москва, Юрайт, 2014, 351 с.

[9] Пекарш А.И., Феоктистов С.И., Колыхалов Д.Г., Шпорт В.И. Координатно-измерительные машины и комплексы. *CALS. Авиационно-космическое машиностроение*. Братухин А.Г., ред. Москва, ОАО НИЦ АСК, 2015, с. 476–489.

[10] Соколова Л.С. Инженерная геометрия — новая учебная дисциплина по геометро-графической подготовке для высших технических учебных заведений. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2014, вып. 3. DOI: 10.18698/2308-6033-2014-3-1212

[11] Соколова Л.С. Геометрическая подготовка бакалавров в современных условиях. *Проблемы качества графической подготовки студентов в техническом вузе: традиции и инновации*. Пермь, 2016, с. 326–332. URL: http://dgng.pstu.ru/conf2016/

[12] Хейфец А.Л., Логиновский А.Н., Буторина И.В., Васильева В.Н. *Инженерная 3D-компьютерная графика*: учебник и практикум для академического бакалавриата. Москва, Юрайт, 2015, 602 с.

Статья поступила в редакцию 20.11.2018

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Соколова Л.С. Многомерная геометрия и абстрактные пространства в структуре знаний современного инженера. *Гуманитарный вестник*, 2019, вып. 2.

http://dx.doi.org/10.18698/2306-8477-2019-2-589

Соколова Людмила Сергеевна — канд. техн. наук, ст. научн. сотр., доцент кафедры «Инженерная графика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 70 научных публикаций, в том числе в области информационных технологий в преподавании начертательной геометрии, инженерной и компьютерной графики.

Multidimensional geometry and abstract spaces in the knowledge structure of a modern engineer

© L.S. Sokolova

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The paper focuses on the content and usage of the concepts of Euclidean multidimensional space and n-dimensional visual geometry in engineering education. The basic concepts of multidimensional geometry are presented: the dimension of space, the subspaces degrees of freedom and the parametric properties of objects. The study gives examples of using the concept of multidimensional space in general engineering disciplines. Analysis of the examples shows that the above basic concepts of multidimensional geometry, such as the dimension of space, the subspaces degrees of freedom and the parametrization of geometric figures and conditions are studied in general engineering disciplines of higher technical educational institutions in applications to specific sciences and are included in the knowledge structure of a modern engineer. The presented material explains exactly how the concept of abstract space was applied in technology. There is no empty abstract space. The diversity of possible sets of objects filling the space and various relationships between them corresponds to an unlimited variety of spaces in technology.

Keywords: *Euclidean multidimensional space, visual multidimensional geometry, interdisciplinary connections*

REFERENCES

[1] Aleksandrov A.D. Geometriya [Geometry]. *BSE* [Great Soviet Encyclopedia]. Moscow, 1971, no. 6, pp. 307–313.

[2] Sokolova L.S. O naglyadnosti v inzhenernoy geometrii [On visualization in engineering geometry]. *Problemy kachestva graficheskoy podgotovki studentov v tekhnicheskom vuze: traditsii i innovatsii* [Problems of quality graphic training of students in a technical university: traditions and innovations]. Perm, 2017, pp. 138–147. Available at: http://dgng.pstu.ru/conf2017/

[3] Sokolova L.S. *Geometriya i grafika — Geometry and Graphics*, 2015, vol. 3, no. 1, pp. 40–46.

[4] Ivanov G.S. *Teoreticheskie osnovy nachertatelnoy geometrii* [Theoretical foundations of descriptive geometry]. Moscow, 1998, Part 4, pp. 58–76.

[5] Volkov V.Ya., Yurkov V.Yu. *Vestnik Sibirskoy avtomobilnodorozhnoy akademii (SibADI) — The Russian Automobile and Highway Industry Journal*, 2005, no. 3, pp. 54–59.

[6] Gershman I.P. Mnogoparametricheskie mnozhestva geometricheskikh figur i ikh koordinatnye podmnozhestva. *Sb. Prikladnaya geometriya* [Multiparameter sets of geometric figures and their coordinate subsets. In: Applied Geometry]. Moscow, RUDN Publ., 1971, pp. 41–59.

[7] Ryzhov N.N. *Parametricheskaya geometriya* [Parametric geometry]. Moscow, MADI Publ., 1988.

[8] Timofeev G.A. *Teoriya mekhanizmov i mashin: uchebnoe posobie. Bazovyiy kurs dlya bakalavrov* [Theory of mechanisms and machines: a textbook. Basic course for bachelors.]. 2nd ed. Moscow, 2014, 351 p.

[9] Pekarsh A.I., Feoktistov S.I., Kolykhalov D.G., Shport V.I. Koordinatno-izmeritelnye mashiny i kompleksy [Coordinate measuring machines and

complexes]. In: *CALS. Aviatsionno-kosmicheskoe mashinostroenie* [CALS. Aerospace engineering]. Bratukhin A.G., ed. Moscow, JSC “NITs ASK” (Research Center for Automated Design Systems) Publ., 2015, pp. 476–489.

[10] Sokolova L.S. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2014, issue 3. DOI: 10.18698/2308-6033-2014-3-1212

[11] Sokolova L.S. Geometricheskaya podgotovka bakalavrov v sovremennykh usloviyakh [Geometrical training of bachelors in modern conditions]. *Problemy kachestva graficheskoy podgotovki studentov v tekhnicheskom vuze: traditsii i innovatsii* [Problems of quality graphic training of students in a technical university: traditions and innovations]. Perm, 2016, pp. 326–332. Available at: http://dgng.pstu.ru/conf2016/

[12] Kheyfets A.L., Loginovskiy A.N., Butorina I.V., Vasileva V.N. *Inzhenernaya 3D-kompyuternaia grafika: uchebnik i praktikum dlya akademicheskogo bakalavriata* [Engineering 3D-computer graphics: a textbook and a workbook for academic undergraduates]. Moscow, Urait Publ., 2015, 602 p.

Sokolova L.S., Cand. Sc. (Eng.), Senior Research Fellow, Assoc. Professor, Department of Engineering Graphics, Bauman Moscow State Technical University.