УДК 164.3+164.08 DOI 10.18698/2306-8477-2017-11-486

Сравнительный анализ квазифункциональных логик

© Ю.В. Ивлев

МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, 119991, Россия

Квазифункциональная (квазиматричная, недетерминистская, ограниченно детерминистская) логика базируется на принципе квазифункциональности, согласно которому во многих случаях между явлениями имеет место отношение частичной неопределенности. Эта логика представляет собой множество логических систем. Они отличаются типами высказываний, отношения по формам между которыми выражаются системой, а также типами логических терминов, входящих в высказывания. Логические системы заданы семантически. Для наглядности отношений между ними и облегчения их выбора для практического применения полезно построить логические системы аксиоматическим методом. В статье изложен результат сравнительного анализа аксиоматически построенных трехзначных и четырехзначных квазиматричных логик и их предельных случаев — матричных логик.

Ключевые слова: *квазифункция, принцип квазифункциональности, квазифункциональная логика, недетерминистская логика, трехзначная логика, четырехзначная логика*

Основные системы квазифункциональной (квазиматричной, недетерминистской, ограниченно детерминистской) логики[1] изложены в ряде работ автора, в том числе в [1–7]. Данные системы построены на основе принципа квазифункциональности: *в познании, природе и социуме между явлениями имеет место не только отношение однозначной детерминации, но и отношение квазидетерминации, т. е., в частности, определенная причина может вызывать не только определенное следствие, но и при одних и тех же условиях в одном случае одно определенное из нескольких возможных следствий, а в другом случае — другое.* В данной статье представлено сравнение этих и других логических систем алетической модальной логики.

Трехзначные логики. Известны трехзначные матричные модальные логики Я. Лукасевича и С. Клини. Построенная автором квазиматричная логика $\mathbf{S_г}$ является их обобщением[2].

Исчисление $\mathbf{S_г}$. Логические термины: $\Box$, $\Diamond$, $\neg$, $\supset$, &, $\vee$, соответственно знаки необходимости (онтологической), возможности (онтологической), отрицания, импликации, конъюнкции и дизъюнкции. Определения формулы, доказательства, теоремы и вывода обычные.

[1] Логическая система — множество отношений по формам между суждениями определенного вида, в данном случае между алетическими модальными суждениями.

[2] Сначала автор построил логику $\mathbf{S_г}$ и только потом установил, что она является содержательным обобщением логик Лукасевича и Клини.

Исчисление включает все схемы аксиом классического исчисления высказываний (КИВ), в которых метасимволы **А**, **В**, **С** обозначают модализированные формулы, т. е. формулы, в которых каждая пропозициональная переменная находится в области действия какого-либо из модальных терминов □ и ◊, modus ponens, правила Геделя (|–A⇒|–□A), а также схемы аксиом:
□A⊃◊A; ¬A⊃¬□A; ¬◊A⊃¬A; A⊃◊A; □A⊃□□A; ◊◊A⊃◊A; ◊□A⊃□A; ◊A⊃□◊A; □A⊃A; ¬□¬A⊃◊A; ◊A⊃¬□¬A; ¬◊A⊃□(A⊃B); □B⊃□(A⊃B); ◊B⊃◊(A⊃B); ◊¬A⊃◊(A⊃B); ◊(A⊃B)⊃(□A⊃◊B); □(A⊃B)⊃(□A⊃□B); □(A⊃B)⊃(◊A⊃◊B); □(A&B)⊃(□A&□B); (□A&□B)⊃□(A&B); (◊A&□B)⊃◊(A&B); (□A&◊B)⊃◊(A&B); ◊(A&B)⊃(◊A&◊B); □A∨(◊A&◊¬A)∨¬◊A; (□A∨□B)⊃□(A□B); (◊A∨◊B)⊃◊(A∨B); □(A∨B)⊃(□A∨◊B); □(A∨B)⊃(◊A∨□B); ◊(A∨B)⊃(◊A∨◊B).

Некоторые особенности исчисления $\mathbf{S_г}$. Во-первых, в нем имеет место правило Геделя.

Во-вторых, все производные правила вывода классического исчисления высказываний, являясь правилами вывода данного исчисления, применимы в выводе лишь к модализированным формулам. Некоторые (по крайней мере некоторые) прямые правила вывода натурального исчисления высказываний применимы и к немодализированным формулам, например правило **А∨В**, **¬А ⇒ В**. Такие непрямые правила, как правило дедукции

$$\frac{\mathbf{Г, A \Rightarrow B}}{\mathbf{Г \Rightarrow A \supset B}}$$

и сведения к абсурду

$$\frac{\mathbf{Г, A \Rightarrow B; Г, A \Rightarrow \neg B}}{\mathbf{Г \Rightarrow \neg A}},$$

неприменимы к немодализированным формулам в выводе. Однако для любых формул в выводе является действующим *ослабленное правило сведения к абсурду*

$$\frac{\mathbf{Г, A \Rightarrow B; Г, A \Rightarrow \neg B}}{\mathbf{Г \Rightarrow \Diamond\neg A}}.$$

Интерпретации. Теория модальностей. Символы □, ◊, ¬, ⊃, &, ∨ интерпретируются как логические термины, определяемые следующими таблицами.

A	**¬A**	**□A**	**◊A**
n	**i**	**n**	**n**
c	**c**	**i**	**n**
i	**n**	**i**	**i**

			B	
	⊃	**n**	**c**	**i**
	n	**n**	**c**	**i**
A	**c**	**n**	**n/c**	**i**
	i	**n**	**n**	**n**

			B	
	&	**n**	**c**	**i**
	n	**n**	**c**	**i**
A	**c**	**c**	**i/c**	**i**
	i	**i**	**i**	**i**

			B	
	∨	**n**	**c**	**i**
	n	**n**	**n**	**n**
A	**c**	**n**	**n/c**	**c**
	i	**n**	**c**	**i**

Здесь **n**, **c**, **i** — соответственно значения **«**однозначно детерминировано фактически (онтологически) наличие положения дел», «не детерминировано однозначно фактически наличие положения дел и не детерминировано однозначно фактически отсутствие положения дел», «однозначно детерминировано фактически отсутствие положения дел». n/c понимается как «то ли **n**, то ли **c**». Выделенное значение — **n**.

Логика $\mathbf{S_г}$ может быть *переинтерпретирована.*

Логика высказываний, выражающих сомнительную информацию. Пусть **n**, **i** и **c** понимаются соответственно как значения «несомненно истинно», «несомненно ложно» и «сомнительно». Логические термины □ и ◊ заменяются на **T** и **K** — «мы знаем несомненно, что…» и «мы знаем, что…» соответственно [5].

Трехполюсные переключательные схемы. Электрический переключатель имеет три позиции: цепь замкнута (**n**), цепь разомкнута (**i**), цепь замкнута, но прохождение электрического тока ограничено (**c**). Очевидно, что в случае третьих позиций двух переключателей при последовательном их соединении лампочка может слабо гореть, а может совсем не гореть, а при параллельном — может гореть в полную мощность, а может слабо гореть. Задача создания теории трехполюсных переключательных схем на основе квазиматричной логики формулируется как проблема, требующая решения.

В качестве проблем формулируются также следующие задачи[3].

1. Создание *компьютерной программы для моделирования процессов с частично неопределенными результатами* на основе логики $\mathbf{S_г}$.

2. *Графическая интерпретация* логических терминов логики $\mathbf{S_г}$.

3. Разработка *теории абстрактных квазиавтоматов*. Квазиавтомат — это устройство, имеющее вход и выход. Внутренний механизм устройства таков, что при некотором определенном входном сигнале реакция на выходе и изменение состояния устройства определены не полностью. Можно представить ситуацию, когда **n** квазиавтоматов имеют **n** входов. Им послано **n** различных сигналов. Неизвестно, какой сигнал воспринят тем или иным квазиавтоматом. Неизвестны также реакции квазиавтоматов на выходе, но известны наборы возможных реакций. Задача заключается в разработке теории, позволяющей определять суммарное поведение системы квазиавтоматов.

Логика $\mathbf{S_г}$ как содержательное обобщение трехзначных логик Лукасевича и Клини. *Трехзначная логика Я. Лукасевича* [8, с. 45–47]. Будем считать, что определения отрицания и импликации известны. А. Тарский ввел следующее определение возможности.

A	**◊A**
1	1
1/2	1
0	0

[3] В монографии автора настоящей статьи «Модальная логика» (1991) в качестве задач для решения сформулировано 30 проблем. Некоторые из них уже решены. Здесь указываются только несколько нерешенных проблем.

Если ввести определения необходимости (□) и случайности (∇): $\Box \mathbf{A} \equiv_{\mathbf{df}} \neg\Diamond\neg A$; $\nabla \mathbf{A} \equiv_{\mathbf{df}} \Diamond \mathbf{A} \,\&\, \Diamond\neg \mathbf{A}$, то прояснится смысл значений 1, 1/2, 0.

A	□**A**	Δ**A**	¬◊**A**
1	1	0	0
1/2	0	1	0
0	0	0	1

Высказывание □**A** является истинным, если и только если **A** имеет значение 1; Δ**A** является истинным, если и только если **A** имеет значение 1/2; ¬◊**A** — если и только если **A** имеет значение 0. Значения 1, 1/2, 0 — это соответственно значения «необходимо», «случайно», «невозможно», и логика Я. Лукасевича является модальной логикой, т. е. это в определенном смысле неклассическая логика того же типа, что и $\mathbf{S_г}$ — вместо отношений между ассерторическими высказываниями в ней описываются отношения между модальными высказываниями и используются отличные от классических, модели логических терминов. В логике Я. Лукасевича высказывания о случайных будущих событиях в момент их произнесения имеют значение 1/2. Однако их дизъюнкция в момент произнесения не обязательно имеет значение 1/2. Высказывания **A**∨**B** и **A**&**B** в момент произнесения могут оцениваться соответственно как случайное (логически или онтологически), так и как необходимое (логически или онтологически); как случайное (логически или онтологически), так и как невозможное (логически или онтологически), т. е. их значения — либо 1/2, либо 1 (либо 1/2, либо 0) соответственно. Так, высказывания «21 декабря будущего года в 16.00 я буду в Варшаве или 21 декабря будущего года в 16.00 я не буду в Варшаве», «21 декабря будущего года в 16.00 я буду в Варшаве и буду в Москве» в момент их произнесения нельзя оценить как случайные. Исходя из этого, можно утверждать, что в логике Лукасевича рассматриваются высказывания, выражающие ситуации, независимые друг от друга. Для описания логических свойств высказываний, характеризующих в том числе взаимозависимые ситуации, следует использовать логику $\mathbf{S_г}$. Таким образом, логика $\mathbf{S_г}$ есть результат обобщения в указанном смысле логики Я. Лукасевича.

Трехзначная логика Клини $\mathbf{K_3}$ отличается от трехзначной логики Лукасевича только определением импликации [9, с. 296]. В логике Лукасевича при значениях 1/2 антецедента и консеквента импликация имеет значение 1, а в логике Клини — 1/2. По поводу этого значения А.С. Карпенко пишет: «В отличие от 1 и 0, 1/2 не несет никакой информации или, по-другому, выражает факт отсутствия информации» [8, с. 59]. Очевидно, что и при такой интерпретации этого значения дизъюнкция может быть равной единице при значениях ее членов 1/2, а конъюнкция — нулю. Если содержательно понимать импликацию как $\neg\mathbf{A}\vee\mathbf{B}$, то как логика Лукасевича, так и логика Клини оказываются частными случаями логики $\mathbf{S_г}$ в том смысле, что они применимы для выражения отношений по формам к ограниченным множествам высказываний, по сравнению с логикой $\mathbf{S_г}$.

Четырехзначные логики. Язык этих логик содержит знаки отрицания, импликации, необходимости и возможности. Основными являются системы $\mathbf{S_а}^+$, $\mathbf{S_з}^+$, $\mathbf{S_и}^+$, $\mathbf{S_к}^+$, $S_л^+$ [3]. Их сравнительный анализ представлен в [10].

Матричные четырехзначные логики — это исчисления $\mathbf{S_b}^-$, $\mathbf{S_c}^-$, $\mathbf{S_d}^-$, $\mathbf{S_e}^-$. Все они являются расширениями классической логики высказываний и содержат следующие схемы аксиом: $\Box\mathbf{A}\supset\mathbf{A}$; $\neg\Box\neg\mathbf{A}\supset\Diamond\mathbf{A}$; $\Diamond\mathbf{A}\supset\neg\Box\neg\mathbf{A}$; $\neg\Diamond\mathbf{A}\supset\Box(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})$; $\Box\mathbf{B}\supset\Box(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})$; $\Diamond\mathbf{B}\supset\Diamond(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})$; $\Diamond\neg\mathbf{A}\supset\Diamond(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})$; $\Diamond(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\supset(\Box\mathbf{A}\supset\Diamond\mathbf{B})$, а также правило вывода: замена двойного отрицания формулы на эту формулу, и наоборот. (Для исчисления, являющегося расширением классической логики высказываний и содержащего только данные схемы аксиом и это дополнительное правило вывода, исчисления $\mathbf{S_{bm}}$ (базисного матричного исчисления), семантику построить не удалось.)

Дополнительные схемы аксиом. *Исчисление* $\mathbf{S_b}^-$. $\Box(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\supset(\Diamond\mathbf{A}\supset\Box\mathbf{B})$; $\Box\mathbf{A}\supset\Box\Box\mathbf{A}$; $\Diamond\Box\mathbf{A}\supset\Diamond\mathbf{A}$; $\Diamond\mathbf{A}\supset\Diamond\Box\mathbf{A}$; $\Box\mathbf{A}\supset\Box\Diamond\mathbf{A}$; $\Box\Diamond\mathbf{A}\supset\Box\mathbf{A}$; $\Diamond\Diamond\mathbf{A}\supset\Diamond\mathbf{A}$.

Исчисление $\mathbf{S_c}^-$. $\Box(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\supset(\Diamond\mathbf{A}\supset\Box\mathbf{B})$; $\Box\mathbf{A}\supset\Box\Box\mathbf{A}$; $\Diamond\Box\mathbf{A}\supset\Diamond\mathbf{A}$; $\Diamond\mathbf{A}\supset\Box\Diamond\mathbf{A}$; $\Diamond\Diamond\mathbf{A}\supset\Diamond\mathbf{A}$.

Исчисление $\mathbf{S_d}^-$. $\Box(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\supset(\Diamond\mathbf{A}\supset\Box\mathbf{B})$; $\Diamond\mathbf{A}^*$, где $\mathbf{A}^*$ — модализированная формула.

Исчисление $\mathbf{S_e}^-$. $\Box(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\supset(\Diamond\mathbf{A}\supset\Box\mathbf{B})$; $\Diamond\Diamond\mathbf{A}$; $\Diamond\neg\Box\mathbf{A}$; $\neg\Diamond\mathbf{A}\supset\Diamond\Box\mathbf{A}$; $\Box\mathbf{A}\supset\Diamond\neg\Diamond\mathbf{A}$; $\Diamond\Box\mathbf{A}\supset(\mathbf{A}\supset\Box\mathbf{A})$; $\Diamond\Box\mathbf{A}\supset(\Diamond\mathbf{A}\supset\mathbf{A})$; $\mathbf{A}\supset(\Diamond\neg\mathbf{A}\supset\Box\Diamond\mathbf{A})$; $\neg\mathbf{A}\supset(\Diamond\mathbf{A}\supset\Box\Diamond\mathbf{A})$.

Двухзначная квазиматричная логика $\mathbf{S_{min}}$. Эта логика представляет собой расширение классического исчисления высказываний за счет добавления к нему двух новых схем аксиом: $\Box\mathbf{A}\supset\mathbf{A}$; $\mathbf{A}\supset\Diamond\mathbf{A}$. (Язык тот же, что и в четырехзначных логиках, описанных выше.) Логика $\mathbf{S_{min}}$ включается по множеству теорем в каждую из этих четырехзначных логик.

В последние годы за рубежом наблюдается интерес к квазифункциональной логике (чаще всего называемой также недетерминистской логикой, логикой без возможных миров). В ряде работ [11, 12] излагаются логические системы, построенные автором настоящей статьи , а также создаются новые логические системы этого же типа (*Ivlev-like systems*) [11]. Сравнительный анализ систем, построенных автором, и этих новых систем еще не производился.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РГНФ в рамках научного проекта № 15-03-00372

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ивлев Ю.В. Табличное построение пропозициональной модальной логики. *Вестник Московского университета. Сер. 7: Философия*, 1973, № 6, с. 51–61.

[2] Ивлев Ю.В. *Содержательная семантика модальной логики*. Москва, Издательство Московского университета, 1985, 168 с.

[3] Ивлев Ю.В. *Модальная логика*. Москва, Издательство Московского университета, 1991, 224 с.

[4] Ivlev Ju.V. Quasi-Functional Logic and Logic of Propositional Attitudes. *Filosophie und Logik. Frege-Kolloquien Jena 1989/1991. Herausgegeben von Werner Stelzner. Walter de Gruyter*. Berlin, New York, 1993, pp. 200–204.

[5] Ivlev Yu.V. Quasi-matrix logic as paraconsistent logic of dubitable information. *Logic and Logical Philosophy*, 2000, vol. 8, pp. 91–97.

[6] Ivlev Yu.V. Quasi-matrix logic. *Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing*, 2005, vol. 11, no. 3–4, pp. 239–252.

[7] Ivlev Yu.V. Generalization of Kalmar's method for quasi-matrix logic. *Логические исследования*, 2013, т. 19, с. 281–307.

[8] Карпенко А.С. *Развитие многозначной логики*. Москва, URSS, 2010, 444 с.

[9] Клини С. *Введение в метаматематику*. Москва, Изд-во иностранной литературы, 1957, 526 с.

[10] Ивлев Ю.В. Основные квазиматричные логики. *Гуманитарный вестник,* 2016, вып. 10. URL: http://dx.doi.org/10.18698/2306-8477-2016-10-391

[11] Marcelo E. Coniglio, del Cerro L.F., Peron N.M. Research article. Finite non-deterministic semantics for some modal systems. *Journal of Applied Non-Classical Logic*, 2015, vol. 25, no. 1, pp. 20–45.

[12] Omori H., Skurt D. More Model Semantics Without Possible Worlds. *IFCoLog Journal of Logics and their Applications*, 2016, vol. 3, no. 5, pp. 815–846.

Статья поступила в редакцию 19.06.2017

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Ивлев Ю.В. Сравнительный анализ квазифункциональных логик. *Гуманитарный вестник*, 2017, вып. 11. http://dx.doi.org/10.18698/2306-8477-2017-11-486

Ивлев Юрий Васильевич — д-р филос. наук, профессор кафедры логики философского факультета МГУ имени М.В. Ломоносова, заслуженный профессор МГУ, заслуженный работник Высшей школы РФ, лауреат Ломоносовской премии МГУ, академик РАЕН. e-mail: ivlev.logic@yandex.ru

Comparative analysis of quasifunctional Logics

© Ju.V. Ivlev

Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991, Russia

Quasifunctional (quasi-matrix, nondeterministic, partially deterministic) logic is based on the principle of quasifunctionality. According to the principle functional connections between observable phenomena are (at least) partially nondeterministic in many cases. This logic is a set of logical systems. These systems might differ in types of propositions and relations between their logical forms as well as in types of logical terms included in propositions. Logical systems are constructed semantically. However, they might be also presented axiomatically with the aim of their comparative analysis simplification and practical use. Here the result of a comparative analysis of axiomatically constructed three- and four-valued quasi-matrix logics and their limiting cases — matrix logics is presented.

Keywords: *quasi-function, the principle of quasifunctionality, quasifunctional logic, non-deterministic logic, three-valued logic, four-valued logic*

REFERENCES

[1] Ivlev Ju.V. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. 7: Filosofiya — Bulletin of Moscow State University. Ser. 7: Philosophy,* 1973, no. 6, pp. 51–61.
[2] Ivlev Ju.V. *Soderzhatelnaya semantika modalnoy logiki* [Contentive semantics of modal logic]. Moscow, MGU Publ., 1985, 168 p.
[3] Ivlev Ju.V. *Modalnaya logika* [Modal logic]. Moscow, MGU Publ., 1991, 224 p.
[4] Ivlev Ju.V. Quasi-Functional Logic and Logic of Propositional Attitudes. In: *Filosophie und Logik. Frege-Kolloquien Jena 1989/199.* Berlin, New York, Walter de Gruyter Publ., 1993, pp. 200–204.
[5] Ivlev Ju.V. *Logic and Logical Philosophy*, 2000, vol. 8, pp. 91–97.
[6] Ivlev Ju.V. *Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing.* Old City Publishing, Inc. (United States), 2005, vol. 11, no. 3–4, pp. 239–252.
[7] Ivlev Ju.V. *Logicheskie issledovaniya — Logical Investigations*, 2013, vol. 19, pp. 281–307.
[8] Karpenko A.S. *Razvitie mnogoznachnoy logiki* [The Development of multivalued logic]. Moscow, URSS Publ., 2010, 444 p.
[9] Kleene S. *Introduction to metamathematics.* New York, Toronto, Van Nostrand, Publ., 1952. [In Russ.: Kleene S. Vvedenie v metamatematiku. Moscow, Inostrannaya literatura Publ., 1957, 526 p.].
[10] Ivlev Ju.V. *Gumanitarnyy vestnik — Humanities Bulletin*, 2016, no. 10, pp. 1–11. DOI: 10.18698/2306-8477-2016-10-391
[11] Coniglio M.E., del Cerro L.F., Peron N.M. *Journal of Applied Non-Classical Logic*, 2015, vol. 25, no. 1, pp. 20–45.
[12] Omori H., Skurt D. *IFCoLog Journal of Logics and their Applications*, 2016, vol. 3, no. 5, pp. 815–846.

Ivlev Ju.V., Dr. Sc. (Phylosophy), Professor, Department of Logic, Faculty of Philosophy, Lomonosov Moscow State University, Honored Professor of Moscow State University, Honored Worker of the Higher School of Russia, Laureate of the Lomonosov Prize of the Moscow State University, Academician of RANS. e-mail: ivlev.logic@yandex.ru