УДК 163 DOI 10.18698/2306-8477-2017-02-413

Естественные модели для итерированных модальностей в системе Льюиса S4

© Н.Л. Архиереев

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Основное средство содержательного истолкования модальных исчислений в современной логике — так называемые семантики возможных миров (реляционные и окрестностные). Исходными в данных семантиках являются понятия возможного мира, модельной структуры, отношения достижимости между мирами. Хотя семантики возможных миров кажутся более естественными, чем алгебраические и топологические семантики модальных исчислений, лежащие в их основе понятия не имеют удовлетворительной содержательной интерпретации. Особенно трудной оказывается проблема содержательной интерпретации итерированных модальных операторов. В статье изложен принципиально новый подход к построению семантики модальных логик, при котором используются только традиционные для них понятия логической истинности, выполнимости и т. д. На основе этого подхода предложено естественное истолкование итерированных модальностей системы S4.

Ключевые слова: *модальность, возможный мир, модельная структура, отношение достижимости, относительно ограниченное множество описаний состояний, истинность, ложность, выполнимость, общезначимость*

В работах [1–3] были изложены основные принципы построения теории логических модальностей (семантики исчисления S5 Льюиса), в которой используются только содержательно оправданные понятия логической истинности/ложности высказываний, совместимости/несовместимости высказываний по истинности/ложности и др. В данной статье указанные принципы распространяются на модальную систему Льюиса S4, дается естественная интерпретация итерированных модальностей этой системы, строится ряд арифметических функций, обеспечивающих исчерпывающий пересчет так называемых относительно ограниченных множеств описаний состояний (конечных упорядоченных множеств описаний состояний, выполняющих роль модельных структур семантик возможных миров).

Семантика относительно ограниченных множеств описаний состояний для системы Льюиса S4. Будем иметь в виду следующую формулировку S4:

- исходные символы: $\neg, \supset, \Box$ (отрицание, импликация, оператор необходимости соответственно), например $\Diamond A \equiv \neg\ \neg A$;
- аксиомы и правила вывода классического исчисления высказываний;

• дополнительные аксиомы и правила вывода:

A1. $\Box(A \supset B) \supset (A \supset B)$,

A2. $\Box A \supset A$,

A3. $\Box A \supset \Box\Box A$,

RG. $\dfrac{\Box A}{\Box\Box A}$

Как и в семантике для S5, различают три типа оценок:

1) оценки формул классической логики высказываний (к.л.в.) в отдельных описаниях состояний (о.с.);

2) оценки формул, находящихся в области действия модальных операторов; при этом собственные модальности 1-й, 2-й и 3-й степени — □, ◊, □◊, ◊□, □◊□, ◊□◊ — рассматриваются соответственно как *кванторы по отдельным о.с., по множествам о.с. и множествам множеств о.с.*;

3) метаистолкования элементарных формул к.л.в. в терминах $\{N, C, I\}$; наличие существенных итерированных модальностей в S4 предполагает возможность вторичных метаистолкований формул к.л.в. в терминах $\{N, C, I\}$. Метаоценки *N*, *I* могут повторно истолковываться только как *NN*, *NI* (что фиксируется аксиомой □A⊃□□A), метаоценка *C* может истолковываться как *NC* либо *CC* (что проявляется в необщезначимости формулы ◊A⊃□◊A в S4).

В экстенсиональной семантике для S5 все о.с., входящие в один кластер, были связаны отношением достижимости — эквивалентности. В S4, как известно, отношение достижимости между мирами рефлексивно и транзитивно, но уже не симметрично, поэтому существенным становится понятие выделенного/действительного мира, вернее, его аналог. По *каждому* о.с. α_i из исходного множества о.с. для формулы строится множество всех возможных ограничений на допустимые истинностные значения переменных, входящих в некоторую формулу. Поскольку каждое о.с. содержит *n* переменных, а каждая переменная может истолковываться как имеющая свое значение случайным образом или по необходимости, допустимыми по каждому α_i оказываются 2^n таких истолкований. Однако в данном случае удобнее рассматривать число 2^n истолкований по отдельному о.с. в виде элементарной арифметической функции — строки треугольника Паскаля с основанием *n*: $2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n$.

Слагаемое C_n^0 обозначает число интерпретаций по отдельному α_i, в которых все переменные истолковываются как строго детерминированные.

Ясно, что по каждому о.с. такая интерпретация будет единственной, а выполнять ее будет одноэлементное множество о.с. Слагаемое

C_n^1 обозначает число интерпретаций, истолковывающих в качестве случайной какую-либо одну переменную. Каждая такая интерпретация будет выполняться каким-либо двухэлементным множеством о.с. Наконец, последнее слагаемое обозначает число интерпретаций, в которых все переменные истолковываются как случайные. Такой интерпретации будет соответствовать 2^n-элементное множество о.с. для формулы.

Пусть далее k — число переменных, которые в некоторой интерпретации имеют метаистолкование C. Если $2 \le k \le n$, то по каждой такой интерпретации, как и в семантике для S5, строится набор дополнительных ограничений на образование конъюнкций логически недетерминированных высказываний. В результате этих ограничений из исходного множества о.с. для формулы могут исключаться некоторые элементы.

Таким образом, в качестве наиболее простых аналогов S4-модельных структур будем использовать трехэлементные множества

$$\langle O\Gamma_1'; \ \alpha_i; \ W_1'' \rangle \ ,$$

где $O\Gamma_1'$ — одна из интерпретаций, выполняющая роль отношения достижимости семантик возможных миров; α_i — исходное о.с. (аналог выделенного или действительного мира), относительно которого рассматривают все мыслимые ограничения возможных логических форм элементарных высказываний; W_1'' — (относительно) ограниченное множество о.с. (возможных миров), выполняющее условия $O\Gamma''$.

Такое трехэлементное множество будем называть относительно ограниченным множеством описаний состояний (ОГОС), или кластером первой степени [3].

Пример. $U\colon \{\alpha_1 = \{p, q\}, \alpha_2 = \{p, \neg q\}, \alpha_3 = \{\neg p, q\}, \alpha_4 = \{\neg p, \neg q\}\}$. Относительно α_1 возможны 4 кластера $\langle O\Gamma_1'; \alpha_i; W_1'' \rangle$:

1) $\langle \{Np, Nq\}; \{p, q\}; \{\{p, q\}\} \rangle$;

2) $\langle \{Np, Cq\}; \{p, q\}; \{\{p, q\}\{p, \neg q\}\} \rangle$;

3) $\langle \{Cp, Nq\}; \{p, q\}; \{\{p, q\}\{\neg p, q\}\} \rangle$;

4) $\langle \{Cp, Cq\}; \{p, q\}; \{\{p, q\}\{p, \neg q\}\{\neg p, q\}\{\neg p, \neg q\}\} \rangle$.

(Относительно последнего множества возможны еще 7 дополнительно ограниченных кластеров [1].)

В кластерах первой степени приписываются значения формулам с модальностями □, ◊. По сути, условия истинности/ложности модальных формул первой степени остаются теми же, что и в S5:

$\left|\Box B\right|_W = t \Leftrightarrow \forall\alpha\left(\alpha \in W \Rightarrow \left|B\right|_\alpha = t\right)$; $\left|\Box \mathrm{B}\right|_W = f \Leftrightarrow \exists\alpha\left(\alpha \in W \wedge \left|B\right|_\alpha = f\right)$;

$\left|\Diamond \mathrm{B}\right|_W = t \Leftrightarrow \exists\alpha\left(\alpha \in W \wedge \left|B\right|_\alpha = t\right)$; $\left|\Diamond B\right|_W = f \Leftrightarrow \forall\alpha\left(\alpha \in W \Rightarrow \left|B\right|_\alpha = f\right)$.

Для определения значений формул с модальностями вида $\Box\Diamond$, $\Diamond\Box$ по каждому кластеру первой степени $\left\langle O\Gamma_1'; \alpha_i; W_1''\right\rangle$ следующим образом строится множество кластеров второй степени $\left\langle O\Gamma_2';\ \alpha_i;\ W_2''\right\rangle$.

Переменные, получившие метаистолкования N или I в некотором $O\Gamma'$, сохраняют исходные значения во всех $O\Gamma'$ более высокого уровня (истолковываются как NN или NI соответственно). А переменные, истолкованные как случайные в $O\Gamma_1'$, могут на втором шаге получить интерпретацию NC или CC. Если элементами W_1'' являются отдельные о.с., то элементами W_2'' — *объекты предыдущего уровня* (множества о.с. W_1''). При этом если $O\Gamma_2'$ некоторого $\left\langle O\Gamma_2';\ \alpha_i;\ W_2''\right\rangle$ содержит для некоторой переменной p_i истолкование NCp_i, то элементами W_2'' будут только такие множества о.с. W_1'', в каждом из которых p_i по крайней мере однажды меняет значение. Если же в $O\Gamma_2'$ содержится интерпретация CCp_i, то в W_2'' она будет представлена тройкой множеств о.с., соответствующей истолкованию $NCp_i \vee Np_i \vee Cp_i$.

Пример. Относительно вышеприведенного кластера $\left\langle \{Np, Cq\}; \{p, q\}; \{\{p, q\}\{p, \neg q\}\}\right\rangle$ возможны два $\left\langle O\Gamma_2';\ \alpha_i;\ W_2''\right\rangle$:

$\left\langle \{NNp, NCq\}; \{p, q\}; \{\{\{p, q\}\{p, \neg q\}\}\}\right\rangle$;

$\left\langle \{NNp, CCq\}; \{p, q\}; \{\{\{p, q\}\{p, \neg q\}\}; \{\{p, q\}\}; \{\{p, \neg q\}\}\}\right\rangle$.

Тройка множеств о.с. во втором кластере соответствует метаистолкованию

$$NNp \wedge NCq \vee NNp \wedge Nq \vee NNp \wedge Iq .$$

Число $\left\langle O\Gamma_2';\ \alpha_i;\ W_2''\right\rangle$ по отдельному α_i определяется функцией

$$C_n^0 \times 2^0 + C_n^1 \times 2^1 + C_n^2 \times 2^2 + \ldots + C_n^k \times 2^k + C_n^n \times 2^n = 3^n ,$$

где слагаемое $C_n^k \times 2^k$ $(0 \le k \le n)$ представляет число кластеров степени $\left\langle O\Gamma_2';\ \alpha_i;\ W_2''\right\rangle$, порожденных кластерами первой степени с k случайными переменными. Если все k случайных переменных получают метаистолкование CC, то W_2'' этого $\left\langle O\Gamma_2';\ \alpha_i;\ W_2''\right\rangle$ будет представлять собой 3^k*-элементное множество множеств о.с.*:

$$<\{NCp, NCq\};\{p,q\};\left\{\left\{\begin{matrix}\{p,q\}\{p,\rceil q\}\\ \{\rceil p,q\}\{\rceil p,\rceil q\}\end{matrix}\right\}\right\}>$$

$$<\{NCp, CCq\};\{p,q\};\left\{\begin{matrix}\left\{\begin{matrix}\{p,q\}\{p,\rceil q\}\\ \{\rceil p,q\}\{\rceil p,\rceil q\}\end{matrix}\right\}\\ \{\{p,q\}\{\rceil p,q\}\}\\ \{\{p,\rceil q\}\{\rceil p,\rceil q\}\}\end{matrix}\right\}>$$

$$<\{Cp, Cq\};\{p,q\};\left\{\begin{matrix}\{p,q\}\{p,\rceil q\}\\ \{\rceil p,q\}\{\rceil p,\rceil q\}\end{matrix}\right\}>$$

$$<\{CCp, NCq\};\{p,q\};\left\{\begin{matrix}\left\{\begin{matrix}\{p,q\}\{p,\rceil q\}\\ \{\rceil p,q\}\{\rceil p,\rceil q\}\end{matrix}\right\}\\ \{\{p,q\}\{p,\rceil q\}\}\\ \{\{\rceil p,q\}\{\rceil p,\rceil q\}\}\end{matrix}\right\}>$$

$$<\{CCp, CCq\};\{p,q\};\left\{\left\{\begin{matrix}1.\left\{\begin{matrix}\{p,q\}\{p,\rceil q\}\\ \{\rceil p,q\}\{\rceil p,\rceil q\}\end{matrix}\right\} & & \begin{matrix}2.\{\{p,q\}\{p,\rceil q\}\}\\ 3.\{\{\rceil p,q\}\{\rceil p,\rceil q\}\}\end{matrix}\\ 6.\{\{p,q\}\} & 7.\{\{p,\rceil q\}\} & 4.\{\{p,q\}\{\rceil p,q\}\}\\ 8.\{\{\rceil p,q\}\} & 9.\{\{\rceil p,\rceil q\}\} & 5.\{\{p,\rceil q\}\{\rceil p,\rceil q\}\}\end{matrix}\right\}\right\}>$$

Каждое из множеств о.с. в последнем W_2 соответствует элементу дизъюнкции с тем же номером:

$$NCp \,\&\, NCq \vee Np \,\&\, NCq \vee Ip \,\&\, NCq \vee NCp \,\&\, Nq \vee NCp \,\&\, Iq \vee$$
$$\vee Np \,\&\, Nq \vee Np \,\&\, Iq \vee Ip \,\&\, Nq \vee Ip \,\&\, Iq.$$

Формулам с итерированными модальностями второй степени следующим образом приписываются значения в $\left\langle O\Gamma_2';\ \alpha_i;\ W_2''\right\rangle$:

$\left|\Box\Diamond \mathrm{B}\right|_{W_2''} = t \Leftrightarrow \forall W_1''(W_1'' \in W_2'' \Rightarrow \exists\alpha(\alpha \in W_1'' \wedge \left|B\right|_\alpha = t))$;

$\left|\Diamond\Box \mathrm{B}\right|_{W_2''} = t \Leftrightarrow \exists W_1''(W_1'' \in W_2'' \wedge \forall\alpha(\alpha \in W_1'' \Rightarrow \left|B\right|_\alpha = t))$;

$\left|\Box\Diamond\neg \mathrm{B}\right|_{W_2''} = t \Leftrightarrow \forall W_1''(W_1'' \in W_2''\ \exists\alpha(\alpha \in W_1'' \wedge \left|B\right|_\alpha = f))$;

$\left|\Diamond\Box\neg \mathrm{B}\right|_{W_2''} = t \Leftrightarrow \exists W_1''(W_1'' \in W_2'' \wedge \forall\alpha(\alpha \in W_1'' \Rightarrow \left|B\right|_\alpha = f))$.

Приведенных определений достаточно, чтобы показать необщезначимость $\Diamond A \supset \Box \Diamond A$ и общезначимость $\Box \mathrm{A} \supset \Box\Box \mathrm{A}$ в полученной семантике.

Пусть формула содержит единственную переменную p; рассмотрим следующий $\left\langle O\Gamma_1';\ \alpha_i;\ W_1''\right\rangle$ для нее:

$$\left\langle \{Cp\};\{p\};\{\{p\},\{\neg p\}\}\right\rangle,$$

относительно которого возможны два множества второй степени:

$$\left\langle \{NCp\};\{p\};\{\{\{p\},\{\neg p\}\}\}\right\rangle;$$

$$\left\langle \{CCp\};\{p\};\{\{\{p\},\{\neg p\}\};\{\{p\}\};\{\{\neg p\}\}\}\right\rangle.$$

В исходном W_1'' формула $\Diamond p$ истинна, потому что $\exists\alpha\left(\alpha \in W \wedge \left|p\right|_\alpha = t\right)$.

В W_2'' с метаистолкованием NCp формула $\Box\Diamond p$ также является истинной, поскольку в данном случае

$$\forall W_1''(W_1'' \in W_2'' \Rightarrow \exists\alpha(\alpha \in W_1'' \wedge \left|p\right|_\alpha = t)).$$

Однако в W_2'' с метаистолкованием CCp содержится множество о.с. $\{\{\neg p\}\}$, в единственном элементе которого p ложно. Поэтому формула $\Box\Diamond p$ ложна в данном W_2 и естественным образом истинно ее отрицание $\Diamond\Box\neg p$, поскольку выполняется условие

$$\exists W_1''(W_1'' \in W_2'' \wedge \forall\alpha(\alpha \in W_1'' \Rightarrow \left|p\right|_\alpha = f)).$$

Следовательно, $\Diamond A \supset \Box \Diamond A$ необщезначима в данной семантике.

Далее формула $\Box p$ будет истинной исключительно в $\langle\{Np\};\{p\};\{\{p\}\}\rangle$. Возможным относительно него будет только кластер $\langle\{NNp\};\{p\};\{\{\{p\}\}\}\rangle$, в котором истинна формула $\Box\Box p$. Таким образом, $\Box p \supset \Box\Box p$ истинна в данной семантике «по построению».

Для определения значений формул с итерированными модальностями третьей степени по каждому кластеру второй степени $\left\langle O\Gamma_2'; \alpha_i; W_2''\right\rangle$ следующим образом строится множество кластеров $\left\langle O\Gamma_3'; \alpha_i; W_3''\right\rangle$.

Переменные, получившие метаистолкования *NN*, *NI*, *NC* в некотором $O\Gamma_2'$, сохраняют исходные значения во всех $O\Gamma_3'$ (имеют истолкования *NNN*, *NNI*, *NNC* соответственно). А переменные с метаистолкованием *CC* в $O\Gamma_2'$ могут на третьем шаге получить интерпретацию *NCC* или *CCC*. Элементами W_3'' являются *объекты предыдущего уровня* (множества множеств о.с. W_2''). При этом если $O\Gamma_3'$ некоторого $\left\langle O\Gamma_3'; \alpha_i; W_3''\right\rangle$ содержит для некоторой переменной p_i истолкование $NCCp_i$, то элементами W_3'' будут только такие множества множеств о.с. W_2'', в каждом из которых p_i имеет истолкование *CC*. Если же в $O\Gamma_3'$ содержится интерпретация $CCCp_i$, то в W_3'' она будет представлена тройкой множеств множеств о.с., соответствующей истолкованию $NCCp_i \vee Np_i \vee Cp_i$.

Пример. $\left\langle\{NNNp, CCCq\};\{p,q\};\begin{bmatrix}\{\{\{p,q\}\{p,\neg q\}\};\{\{p,q\}\};\{\{p,\neg q\}\}\} \\ \{\{\{p,q\}\}\};\{\{\{p,\neg q\}\}\}\end{bmatrix}\right\rangle$.

Тройка множеств множеств о.с. в прямоугольных скобках соответствует метаистолкованию

$$NNNp \wedge NCCq \vee NNNp \wedge Nq \vee NNp \wedge Iq .$$

Общее число $\left\langle O\Gamma_3'; \alpha_i; W_3''\right\rangle$ по отдельному α_i описывается арифметической функцией

$$C_n^0 \times 3^0 + C_n^1 \times 3^1 + C_n^2 \times 3^2 + \ldots + C_n^k \times 3^k + C_n^n \times 3^n = 4^n ,$$

где слагаемое $C_n^k \times 3^k$ представляет число кластеров третьей степени $\left\langle O\Gamma_3'; \alpha_i; W_3''\right\rangle$, порождаемых теми кластерами первой степени, в каждом из которых в качестве случайных истолковываются какие-либо k переменных $(0 \le k \le n)$. Если все k случайных переменных получают метаистолкование *CCC*, то W_3'' этого $\left\langle O\Gamma_3'; \alpha_i; W_3''\right\rangle$ будет представлять собой 3^k *-элементное множество множеств множеств о.с.*:

$$
<\{CCCp, CCCq\};\{p,q\}\left\{\begin{array}{ll}
1.\left\{\begin{array}{ll}
\left\{\begin{array}{l}\{p,q\}\{p,\rceil q\}\\ \{\rceil p,q\}\{\rceil p,\rceil q\}\end{array}\right\} & \{\{p,q\}\{p,\rceil q\}\}\\
 & \{\{\rceil p,q\}\{\rceil p,\rceil q\}\}\\
\{\{p,q\}\}\{\{p,\rceil q\}\} & \{\{p,q\}\{\rceil p,q\}\}\\
\{\{\rceil p,q\}\}\{\{\rceil p,\rceil q\}\} & \{\{p,\rceil q\}\{\rceil p,\rceil q\}\}
\end{array}\right\} & \\
2.\left\{\begin{array}{l}\{\{p,q\}\{\rceil p,q\}\}\\ \{\{p,q\}\}\{\{\rceil p,q\}\}\end{array}\right\} & 3.\left\{\begin{array}{l}\{\{p,\rceil q\}\{\rceil p,\rceil q\}\}\\ \{\{p,\rceil q\}\}\{\{\rceil p,\rceil q\}\}\end{array}\right\}\\
4.\left\{\begin{array}{l}\{\{p,q\}\{p,\rceil q\}\}\\ \{\{p,q\}\}\{\{p,\rceil q\}\}\end{array}\right\} & 5.\left\{\begin{array}{l}\{\{\rceil p,q\}\{\rceil p,\rceil q\}\}\\ \{\{\rceil p,q\}\}\{\{\rceil p,\rceil q\}\}\end{array}\right\}\\
6.\{\{\{p,q\}\}\} & 7.\{\{\{p,\rceil q\}\}\}\\
8.\{\{\{\rceil p,q\}\}\} & 9.\{\{\{\rceil p,\rceil q\}\}\}
\end{array}\right\}>
$$

Каждое из множеств множеств о.с. данного W_3 соответствует элементу дизъюнкции с тем же номером:

$$NCCp \,\&\, NCCq \vee NCCp \,\&\, Nq \vee NCCp \,\&\, Iq \vee Np \,\&\, NCCq \vee$$
$$\vee Ip \,\&\, NCCq \vee Np \,\&\, Nq \vee Np \,\&\, Iq \vee Ip \,\&\, Nq \vee Ip \,\&\, Iq.$$

Формулам с модальностями вида $\Box\Diamond\Box$, $\Diamond\Box\Diamond$ следующим образом приписываются значения в $\left\langle O\Gamma_3';\ \alpha_i;\ W_3''\right\rangle$:

$| \Diamond\, \mathrm{B}|_{W_3''} = t \Leftrightarrow \forall W_2''(W_2'' \in W_3'' \Rightarrow \exists W_1''(W_1'' \in$

$\in W_2'' \wedge \forall\alpha(\alpha \in W_1'' \Rightarrow |B|_\alpha = t)));$

$|\Diamond\ \Diamond \mathrm{B}|_{W_3''} = t \Leftrightarrow \exists W_2''(W_2'' \in W_3'' \wedge \forall W_1''(W_1'' \in$

$\in W_2'' \Rightarrow \exists\alpha(\alpha \in W_1'' \wedge |B|_\alpha = t)));$

$| \Diamond\neg \mathrm{B}|_{W''_3} = t \Leftrightarrow \forall W_2''(W_2'' \in W_3'' \Rightarrow \exists W_1''(W_1'' \in$

$\in W_2'' \wedge \forall\alpha(\alpha \in W_1'' \Rightarrow |B|_\alpha = f)));$

$$\left|\Diamond\Diamond\neg B\right|_{W''_3} = t \Leftrightarrow \exists W_2''(W_2'' \in W_3'' \wedge \forall W_1''(W_1'' \in$$
$$\in W_2'' \Rightarrow \exists\alpha(\alpha \in W_1'' \wedge \left|B\right|_\alpha = f))).$$

$$<\{NCCp, CCCq\}\{p,q\}\left\{\begin{array}{l} 1.\left\{\left\{\begin{array}{ll} \left\{\begin{array}{l}\{p,q\}\{p,\rceil q\}\\ \{\rceil p,q\}\{\rceil p,\rceil q\}\end{array}\right\} & \begin{array}{l}\{\{p,q\}\{p,\rceil q\}\}\\ \{\{\rceil p,q\}\{\rceil p,\rceil q\}\}\end{array}\\ \{\{p,q\}\}\{\{p,\rceil q\}\} & \{\{p,q\}\{\rceil p,q\}\}\\ \{\{\rceil p,q\}\}\{\{\rceil p,\rceil q\}\} & \{\{p,\rceil q\}\{\rceil p,\rceil q\}\}\end{array}\right\}\right\}\\ 2.\left\{\begin{array}{ll}\{\{p,q\} & \{\rceil p,q\}\}\\ \{\{p,q\}\} & \{\{\rceil p,q\}\}\end{array}\right\} \quad 3.\left\{\begin{array}{ll}\{\{p,\rceil q\} & \{\rceil p,\rceil q\}\}\\ \{\{p,\rceil q\}\} & \{\{\rceil p,\rceil q\}\}\end{array}\right\}\end{array}\right\}>$$

$$NCCp \,\&\, NCCq \vee NCCp \,\&\, Nq \vee NCCp \,\&\, Iq.$$

Формула $\Box\Diamond\Box(p\supset q)$ истинна в данном W_3, поскольку

$$\forall W_2''(W_2'' \in W_3'' \Rightarrow \exists W_1''(W_1'' \in W_2'' \wedge \forall\alpha(\alpha \in W_1'' \Rightarrow \left|(p \supset q)\right|_\alpha = t))).$$

Сказанное о способах образования относительно ограниченных множеств описаний состояний различных степеней можно обобщить в виде таблицы.

Структура относительно ограниченных множеств о.с.

Степень кластера	Число случайных переменных в ОГ	Число элементов в W	Тип элементов W
$\langle O\Gamma_1';\ \alpha_i;\ W_1''\rangle$	$(0 \le i \le n)$ (n — число переменных в формуле)	2^i	О.с.
$\langle O\Gamma_2';\ \alpha_i;\ W_2''\rangle$	$(0 \le k \le i)$	3^k	Множества о.с.
$\langle O\Gamma_3';\ \alpha_i;\ W_3''\rangle$	$(0 \le m \le k)$	3^m	Множества множеств о.с.

В каждом случае арифметические функции, характеризующие множества W соответствующей степени, принимают вид:

$$\left\langle O\Gamma_1'; \alpha_i; W_1''\right\rangle: \quad C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n ;$$

$$\left\langle O\Gamma_2'; \alpha_i; W_2''\right\rangle: C_n^0 \times 2^0 + C_n^1 \times 2^1 + C_n^2 \times 2^2 + \ldots + C_n^k \times 2^k + C_n^n \times 2^n = 3^n ;$$

$$\left\langle O\Gamma_3'; \alpha_i; W_3''\right\rangle:$$

$$C_n^0 \times 3^0 + C_n^1 \times 3^1 + C_n^2 \times 3^2 + \ldots + C_n^k \times 3^k + C_n^n \times 3^n = 4^n .$$

Данные выражения можно естественным образом обобщить для множеств W произвольной конечной степени:

$$\left\langle O\Gamma_R'; \alpha_i; W_R''\right\rangle:$$

$$C_n^0 \times R^0 + C_n^1 \times R^1 + C_n^2 \times R^2 + \ldots + C_n^k \times R^k + C_n^n \times R^n = (R+1)^n .$$

Нетрудно убедиться, что при $R > 3$ итерированные метаистолкования не дают никакой новой информации о допустимых значениях элементарных высказываний. Иными словами, факт отсутствия в данной семантике собственных итерированных модальностей степени выше трех зафиксирован в самом способе ее построения.

Построенная семантика непротиворечива и полна относительно исчисления Льюиса S4. Доказательство опускается.

Как указывалось в начале настоящей работы, в семантиках предложенного типа используют только традиционные для логики понятия (логической) истинности/ложности, совместимости/несовместимости высказываний по истинности/ложности и т. д. При этом смысл модальных операторов выражается с помощью *конечных* множеств о.с., что, по мнению автора, делает семантики ограниченных и относительно ограниченных множеств о.с. возможной основой для построения автоматической процедуры проверки модальных формул на общезначимость/выполнимость. Кроме того, данный подход позволяет описать в традиционных терминах свойства целого ряда неклассических логических систем. В частности, на основе известного перевода исчисления Гейтинга в модальную систему S4, предложенного еще в 1948 г. Дж. Маккинси и А. Тарским, автор статьи разработал естественную семантику исчисления Int. Если в качестве исходного понятия семантик данного типа взять не классическое, а обобщенное о.с., то можно получить релевантные варианты соответствующих систем. Некоторые из этих вопросов будут более подробно рассмотрены в последующих работах автора, посвященных данной тематике.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Архиереев Н.Л. Логические модальности как арифметические функции — *Философия науки*, 2010, № 2 (45), с. 78–91.

[2] Архиереев Н.Л. Трехзначная неистинностно-функциональная модальная логика. *Логико-философские исследования*, 2010, вып. 4, с. 123–130.

[3] Ивлев Ю.В. *Модальная логика.* Москва, Изд-во МГУ, 1991, с. 168–190.

Статья поступила в редакцию 30.11.2016

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Архиериев Н.Л. Естественные модели для итерированных модальностей в системе Льюиса S4. *Гуманитарный вестник*, 2017, вып. 2.
http://dx.doi.org/10.18698/2306-8477-2017-02-413

Архиереев Николай Львович — канд. филос. наук, доцент кафедры «Философия» МГТУ им. Н. Э. Баумана. e-mail: arkh-nikolaj@yandex.ru

Natural models for iterated modalities in the Lewis' S4 system

© N.L. Arkhiereev

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The primary means of interpretation in the case of modal calculi in contemporary logic is the so-called possible worlds semantics (of the relational and neighbourhood types). In these semantics, the basic concepts include the possible world, the model structure and the accessibility relation between possible worlds. Though possible worlds semantics appear to be more natural than algebraic and topological semantics of modal calculi, their fundamental concepts lack a meaningful interpretation. The problem of interpreting iterated modal operators poses a particular challenge. The article describes a fundamentally new approach to developing modal logic semantics, using only their conventional concepts of logical truth, satisfiability etc. We suggest a natural interpretation of iterated modalities in the S4 system based on this approach.

Keywords: *modality, possible world, model structure, accessibility relation, relatively bounded set of state descriptions, true, false, satisfiability, validity*

REFERENCES

[1] Arkhiereev N.L. *Filosofiya nauki — Philosophy of Sciences*, 2010, no. 2 (45), pp. 78–91.
[2] Arkhiereev N.L. *Logiko-filosofskie issledovaniya — Studies in logic and philosophy*, 2010, issue 4, pp. 123–130.
[3] Ivlev Yu.V. *Modalnaya logika* [Modal logic]. Moscow, Lomonosov Moscow State University Publ., 1991, pp. 168–190.

Arkhiereev N.L., Cand. Sci. (Philos.), Assoc. Professor, Department of Philosophy, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: arkh-nikolaj@yandex.ru