

Теория логических модальностей без «возможных миров»

© Н.Л. Архиреев

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассмотрены основные проблемы «традиционных» семантик модальной логики — так называемых семантик возможных миров. При истолковании смысла модальных операторов данные семантики, помимо понятия возможного мира, используют понятия модельной структуры и отношения достижимости между мирами, которые, как выясняется, не имеют однозначной содержательной интерпретации и приводят к целому ряду парадоксов. Исследованы основные принципы построения альтернативной семантики — семантики ограниченных множеств описаний состояний — для системы Льюиса S5. Данная семантика использует только «классические» понятия описания состояния, множества описаний состояний, совместимости/несовместимости высказываний по истинности/ложности, что, в первую очередь, и отличает их от семантик возможных миров.

Ключевые слова: модальность, возможный мир, модельная структура, отношение достижимости, ограниченное множество описаний состояний, дополнительно ограниченное множество описаний состояний, истинность, ложность, выполнимость, общезначимость.

Неформальные замечания. Одной из актуальных и при этом традиционных проблем философии науки, эпистемологии, логики является проблема адекватной экспликации и формализации понятий логической и фактической необходимости, возможности, невозможности, случайности. Для уточнения смысла данных понятий и их точного анализа построено обширное семейство так называемых модальных логик. Первоначально они были сформулированы как формальные (аксиоматические) системы без соответствующих семантик. Затем для них были предложены интерпретации в терминах алгебры и топологии и, наконец, в работах С. Крипке, Р. Монтегю, Я. Хинтикки и др. были построены так называемые семантики возможных миров, являющиеся на сегодня «парадигмальными» для модальных логик.

Современные семантики возможных миров являются попыткой формально точной конкретизации достаточно старой идеи рассмотрения «мыслимых альтернатив» при анализе модальных понятий. Обычной при этом является ссылка на Г.В. Лейбница, использовавшего понятие возможного мира для уточнения понятий необходимой и случайной («фактической») истины. Необходимая истина рассматривается при этом как то, что имеет место во всех возможных мирах

(всех «мыслимых альтернативах» наличному состоянию дел), а случайная истина — как то, что имеет место лишь в некоторых из них. Однако очевидно, что, поскольку число возможных миров в философии Лейбница бесконечно, определение необходимой истинности некоторого формального выражения как его истинности во всех возможных мирах является неконструктивным [1, с. 257]. Кроме того, при построении «классических» семантик возможных миров в современной логике в качестве исходных (помимо собственно понятия возможного мира) используются понятия модельной структуры и отношения достижимости между мирами, смысл которых во многом остается неясным. Собственно, под возможным миром иногда подразумевают мыслимое (возможное, действительное или необходимое) положение дел, состояние наших знаний об окружающем мире в определенный момент времени и т. д. Порой предлагается вообще не конкретизировать понятие возможного мира, рассматривая его просто как абстрактную «точку соотнесения», выбор которой в качестве исходной («выделенной») в семантическом анализе модальных понятий определяется задачами данного анализа или же особенностями отношения достижимости в соответствующей системе. При этом «размножение» самих систем, называемых модальными, осуществляется в основном сугубо формальными методами, например наложением дополнительных, зачастую весьма экзотических, ограничений на отношение достижимости между мирами.

Так, еще Е.К. Войшвилло указывал, что «...остается неясным, почему, например, действительный мир, как и его окрестность, относится всегда к некоторой модельной структуре и что представляет собой последняя в онтологическом плане или с точки зрения гносеологии. Неясно также и то, что представляют собой возможные миры и отношения достижимости между ними, чем обусловлено различие достижимости в различных системах. Особенно сложным представляется вопрос о смысле высказываний со сложными итерированными модальностями, например в системе S_4 » [2, с. 77].

Один из авторов так называемой реляционной семантики возможных миров для ряда модальных исчислений, С.А. Крипке, в работе [3] дает следующее определение отношения достижимости: «“ H_1RH_2 ” читается как “мир H_2 возможен относительно H_1 ”, “возможен в H_1 ” или “зависит от H_1 ”; это значит, что *каждое высказывание, истинное в H_2 , возможно в H_1* (курсив автора — *Н.А.*) — т. е. отношение “достижимости” между мирами определяется через понятие (относительной) возможности. Как же определяется само понятие “возможность”? “*А возможно в мире H_1 тогда и только тогда, когда существует мир H_2 , возможный относительно H_1 , в котором А истинно*” (курсив автора — *Н.А.*)» [3, с. 258]. Таким образом, истин-

ность высказывания A в некотором мире H_2 определяется через понятие его возможности в некотором мире H_1 . Возможность же высказывания A в мире H_1 определяется через понятие его истинности в мире H_2 . На наш взгляд, такое определение вряд ли можно считать удовлетворительным.

Г. Прист, авторитетный англоязычный специалист в области неклассических логик, анализируя истолкование природы возможных миров, принятое в рамках так называемого модального актуализма, указывает на схожий парадокс. Согласно данному варианту модальной онтологии, возможные миры, подобно числам, являются абстрактными сущностями. При этом отдельный возможный мир определяется множеством содержащихся (истинных) в нем высказываний. Однако очевидно, что далеко не каждое множество высказываний определяет возможный мир. К примеру, множество, включающее два высказывания, но не включающее их конъюнкцию, не может считаться возможным миром. Таким образом, для того чтобы множество высказываний рассматривалось как возможный мир, оно по крайней мере должно быть замкнуто относительно логического следования. Но здесь-то, по замечанию автора, и кроется проблема. Техника возможных миров была призвана объяснить, почему именно такие, а не иные логические следствия являются истинными. Оказывается, понятие истинности требуется для объяснения понятия возможного мира, а никак не наоборот [4, с. 29–31].

Далее излагаются основы принципиально нового подхода к построению семантик для некоторых систем модальной логики. Отличительной особенностью данного подхода, впервые предложенного Ю.В. Ивлевым [5], является использование для моделирования смысла алетических модальных операторов чисто классических понятий (логической) истинности, ложности, совместимости (несовместимости) высказываний по истинности и т. д. Роль «возможных миров» выполняют при этом классические описания состояний, а роль модельных структур — упорядоченные (ограниченные, дополнительно и относительно ограниченные) множества (конечные «кластеры») описаний состояний (о.с.).

Большинство исследователей традиционно считает именно систему $S5$ Льюиса наиболее подходящей для выражения смысла логических модальностей (т. е. понятий «логически необходимо», «логически случайно», «логически невозможно»), поскольку в $S5$ «утверждение о логической необходимости некоторого высказывания будет справедливым только в том случае, если его логическая форма выражается посредством общезначимой формулы, утверждение о логической возможности высказывания будет истинным, если соответствующая формула выполнима, а утверждение о логической невозможности

высказывания будет истинным, если формула, выражающая его логическую форму, невыполнима» [6, с. 301]. Поэтому естественным кажется начать с описания принципов построения семантики нового типа для S5.

Семантика ограниченных множеств описаний состояний для системы Льюиса S5. Будем иметь в виду следующую формулировку S5:

- исходные символы: \neg , \supset , \Box (отрицание, импликация, оператор необходимости соответственно), например $\Diamond A \equiv \neg\Box\neg A$ («возможно A эквивалентно не необходимо не A »);

- аксиомы и правила вывода классического исчисления высказываний;

- Дополнительные аксиомы и правила вывода:

A1. $\Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)$,

A2. $\Box A \supset A$,

A3. $\Diamond A \supset \Box \Diamond A$,

RG. $\frac{|-A}{|- \Box A}$.

В основе рассматриваемого подхода к построению теории логических модальностей лежит идея последовательной интерпретации каждой пропозициональной переменной, входящей в формулу с операторами \Box, \Diamond в терминах $\{N, C, I\}$, т. е. как обозначающей логически истинное (необходимое), логически недетерминированное (случайное) и логически ложное (невозможное) высказывание соответственно. Далее некоторые конъюнкции логически недетерминированных высказываний могут дополнительно оцениваться как логически случайные или же невозможные, поскольку определенные конъюнкции логически «случайных» высказываний сами могут оказаться логически невозможными высказываниями (например, «1 января 2021 года я встречу Деда Мороза» и «1 января 2021 года я не встречу Деда Мороза»). В результате таких истолкований (ограничений допустимых логических форм элементарных высказываний (ОГ)) из исходного множества о.с. W для формулы могут исключаться некоторые о.с. В частности, если переменная получает метаистолкование N , то из W исключаются все о.с., содержащие $\neg p$; если переменная получает метаистолкование I , то из W исключаются все о.с., содержащие p ; если же переменная получает метаистолкование C , то соответствующее ему множество W может содержать последовательность о.с. «длины» от 2 до 2^N , в которой переменная хотя бы однажды меняет значение. При этом условия истинности/ложности выражений с модальными операторами формулируются своего рода «зеркальным» образом по

сравнению с аналогичными условиями в семантиках возможных миров: «суждение A истинно в некотором мире β не потому, что A истинно во всех возможных мирах, достижимых из β , а наоборот, последнее имеет место потому, что необходимость ситуации A детерминирована в самом β » [2, с. 80].

Получаемые при этом ограниченные множества о.с. $\langle \text{ОГ}; W' \rangle$ и дополнительно ограниченные множества о.с. $\langle \text{ОГ}'; W'' \rangle$ играют роль модельных структур системы S5, в качестве же возможного мира выступает классическое о.с.

В семантике различают три вида оценок:

1) оценки формул классической логики высказываний (к.л.в.) в отдельных о.с. (двузначные истинностно-функциональные, или «чисто классические», оценки);

2) оценки формул, находящихся в области действия операторов \Box, \Diamond (двузначные не-истинностно-функциональные оценки, которые приписываются в множествах о.с.);

3) метаистолкования элементарных формул к.л.в. в терминах $\{N, C, I\}$, которые также осуществляются относительно множеств о.с. (трехзначные не-истинностно-функциональные оценки).

I. В произвольном о.с. любая формула к.л.в. принимает ровно одно значение из множества $\{t, f\}$:

$$|p|_{\alpha} = t \Leftrightarrow p \in \alpha; |p|_{\alpha} = f \Leftrightarrow p \notin \alpha \Leftrightarrow \neg p \in \alpha \Leftrightarrow |\neg p|_{\alpha} = t;$$

$$|\neg B|_{\alpha} = t \Leftrightarrow |B|_{\alpha} = f; |\neg B|_{\alpha} = f \Leftrightarrow |B|_{\alpha} = t;$$

$$|A \supset B|_{\alpha} = t \Leftrightarrow |A|_{\alpha} = f \vee |B|_{\alpha} = t;$$

$$|A \supset B|_{\alpha} = f \Leftrightarrow |A|_{\alpha} = t \wedge |B|_{\alpha} = f.$$

II. В произвольном множестве о.с. W любая формула с операторами \Box, \Diamond принимает ровно одно значение из множества $\{t, f\}$:

$$|B|_W = t \Leftrightarrow \forall \alpha (\alpha \in W \Rightarrow |B|_{\alpha} = t).$$

Формула $\Box B$ истинна в $\langle \text{ОГ}'; W'' \rangle$, если и только если (е.т.е.) B общезначима в W'' , т. е. истинна в каждом о.с. из соответствующего множества. Аналогично:

$$|\Box B|_W = f \Leftrightarrow \exists \alpha (\alpha \in W \wedge |B|_{\alpha} = f);$$

$$|\Diamond B|_W = t \Leftrightarrow \exists \alpha (\alpha \in W \wedge |B|_{\alpha} = t);$$

$$|\diamond B|_W = f \Leftrightarrow \forall \alpha (\alpha \in W \Rightarrow |B|_\alpha = f).$$

(Операторы \square, \diamond рассматриваются как кванторы по описаниям состояний; «существенными» оказываются только модальности первой степени — «собственные» для S5 модальности $\square, \diamond, \square \neg, \diamond \neg$. Итерированные модальности рассматриваются как «фиктивные» кванторы — кванторы по переменным, не имеющим вхождения в формулу.)

Формула $\square B$ логически общезначима, е.т.е. B общезначима в каждом $W \in 2^U$ (U есть 2^n — элементное множество о.с. для формулы).

Формула $\square B$ логически выполнима, е.т.е. B общезначима в некотором $W \in 2^U$.

Формула $\diamond B$ логически общезначима, е.т.е. B логически выполнима.

III. В произвольном множестве о.с. W элементарная формула принимает одно значение из множества $\{N, C, I\}$ в зависимости от того, входит ли она в каждое о.с. из этого кластера без отрицания, с отрицанием или же по крайней мере однажды меняет значение в этом множестве о.с.:

$$|p|_W = N \Leftrightarrow \forall \alpha (\alpha \in W \Rightarrow |p|_\alpha = t);$$

$$|p|_W = I \Leftrightarrow \forall \alpha (\alpha \in W \Rightarrow |p|_\alpha = f);$$

$$|p|_W = C \Leftrightarrow \exists \alpha (\alpha \in W \wedge |p|_\alpha = t) \wedge \exists \alpha (\alpha \in W \wedge |p|_\alpha = f).$$

Метаистолкования $\{N, C, I\}$ разбивают множество 2^U на непересекающиеся классы эквивалентности.

Нетрудно заметить, что между понятиями из групп II и III имеется следующая связь:

$$|\square p|_W = t \Leftrightarrow |p|_W = N; |\square p|_W = f \Leftrightarrow |p|_W = I \vee |p|_W = C;$$

$$|\diamond p|_W = t \Leftrightarrow |p|_W = N \vee |p|_W = C; |\diamond p|_W = f \Leftrightarrow |p|_W = I.$$

С использованием этих соотношений покажем общезначимость формулы $\diamond A \supset \square \diamond A$ в полученной семантике. Допустим, $|\diamond A \supset \square \diamond A|_W = f$ в некотором $W \in 2^U$. Тогда $|\diamond A|_W = t$ и $|\square \diamond A|_W = f$, т. е. $|\diamond A|_W = t$ и $|A \square \neg A|_W = t$. Следовательно, $|\diamond A|_W = t$ и $|\square \neg A|_W = t$ (поскольку «существенными» в S5 являются только модальности первой степени); $|\diamond A|_W = t \Leftrightarrow |A|_W = N \vee |A|_W = C; |\square \neg A|_W = t \Leftrightarrow |A|_W = I$, сле-

довательно, $|\Diamond A|_W = t$ и $|\Box \neg A|_W = t \Leftrightarrow |A|_W = N, |A|_W = I \vee |A|_W = C, |A|_W = I$ — противоречие.

Итак, $\Diamond A \supset \Box \Diamond A$ общезначима в данной семантике.

Приведем еще один пример, наглядно иллюстрирующий суть данного подхода.

Рассмотрим формулу $\Diamond \neg p \supset (p \supset \Diamond q)$, исходное множество о.с. для нее $U: \{\alpha_1 = \{p, q\}, \alpha_2 = \{p, \neg q\}, \alpha_3 = \{\neg p, q\}, \alpha_4 = \{\neg p, \neg q\}\}$ и все конструкции $\langle OG; W' \rangle, \langle OG'; W'' \rangle$, получаемые в результате метаистолкований переменных формулы в терминах $\{N, C, I\}$:

- 1) $\langle \{Np, Nq\}; \{\{p, q\}\} \rangle$; 2) $\langle \{Np, Nq\}; \{\{p, q\}\} \rangle$; 3) $\langle \{Np, Iq\}; \{\{p, \neg q\}\} \rangle$;
- 4) $\langle \{Ip, Iq\}; \{\{\neg p, \neg q\}\} \rangle$; 5) $\langle \{Np, Cq\}; \{\{p, q\}, \{p, \neg q\}\} \rangle$;
- 6) $\langle \{Ip, Cq\}; \{\{\neg p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\} \rangle$; 7) $\langle \{Cp, Nq\}; \{\{p, q\}, \{\neg p, q\}\} \rangle$;
- 8) $\langle \{Cp, Iq\}; \{\{p, \neg q\}, \{\neg p, \neg q\}\} \rangle$;
- 9) $\left\langle \begin{array}{l} \{Cp, Cq, C\{p \wedge q\}, C\{p \wedge \neg q\}, C\{\neg p \wedge q\}, C\{\neg p \wedge \neg q\}\} \\ \{\{p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\} \end{array} \right\rangle$;
- 10) $\left\langle \begin{array}{l} \{Cp, Cq, I\{p \wedge q\}, C\{p \wedge \neg q\}, C\{\neg p \wedge q\}, C\{\neg p \wedge \neg q\}\} \\ \{\{p, \neg q\}, \{\neg p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\} \end{array} \right\rangle$;
- 11) $\left\langle \begin{array}{l} \{Cp, Cq, C\{p \wedge q\}, I\{p \wedge \neg q\}, C\{\neg p \wedge q\}, C\{\neg p \wedge \neg q\}\} \\ \{\{p, q\}, \{\neg p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\} \end{array} \right\rangle$;
- 12) $\left\langle \begin{array}{l} \{Cp, Cq, C\{p \wedge q\}, C\{p \wedge \neg q\}, I\{\neg p \wedge q\}, C\{\neg p \wedge \neg q\}\} \\ \{\{p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, \neg q\}\} \end{array} \right\rangle$;
- 13) $\left\langle \begin{array}{l} \{Cp, Cq, C\{p \wedge q\}, C\{p \wedge \neg q\}, C\{\neg p \wedge q\}, I\{\neg p \wedge \neg q\}\} \\ \{\{p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, q\}\} \end{array} \right\rangle$;
- 14) $\left\langle \begin{array}{l} \{Cp, Cq, I\{p \wedge q\}, C\{p \wedge \neg q\}, C\{\neg p \wedge q\}, I\{\neg p \wedge \neg q\}\} \\ \{\{p, \neg q\}, \{\neg p, q\}\} \end{array} \right\rangle$;
- 15) $\left\langle \begin{array}{l} \{Cp, Cq, C\{p \wedge q\}, I\{p \wedge \neg q\}, I\{\neg p \wedge q\}, C\{\neg p \wedge \neg q\}\} \\ \{\{p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\} \end{array} \right\rangle$.

Нетрудно убедиться, что, согласно вышеприведенным условиям истинности/ложности формул с модальными операторами, формула $\Diamond \neg p \supset (\Box p \supset \Diamond q)$ истинна в каждом из данных ограниченных/дополнительно ограниченных множеств о.с.

Таким образом, $\forall W (W \in 2^U \Rightarrow |\diamond \neg p \supset (\Box p \supset \diamond q)|_W = t)$, т. е. формула $\diamond \neg p \supset (\Box p \supset \diamond q)$ общезначима в S5.

При достаточно большом числе переменных в формуле в качестве более эффективного средства характеристики «кластеров» используются арифметические функции особого вида. Число исходных истолкований переменных формулы в терминах $\{N, C, I\}$ описывается выражением

$$3^n = C_n^0 \cdot 2^n + C_n^1 \cdot 2^{n-1} + C_n^2 \cdot 2^{n-2} + \dots + C_n^{n-1} \cdot 2^1 + C_n^n \cdot 2^0,$$

где $C_n^k \cdot 2^{n-k}$ ($0 \leq k \leq n$, C_n^k — биномиальный коэффициент) — число кластеров, в которых k переменных имеют метаистолкование C . Число дополнительно ограниченных множеств о.с. в общем случае определяется выражением

$$2^{2^n} - [C_n^0 \cdot 2^n + C_n^1 \cdot 2^{n-1} + C_n^2 \cdot 2^{n-2} \cdot N(2) + C_n^3 \cdot 2^{n-3} \cdot N(3) + \dots + C_n^k \cdot 2^{n-k} \cdot N(k) + \dots + C_n^{n-1} \cdot 2^1 \cdot N(n-2) + C_n^n \cdot 2^0],$$

где $N(k)$ ($2 \leq k \leq n-1$) — число допустимых ограничений на образование конъюнкций k случайных переменных. Построенная семантика непротиворечива и полна относительно исчисления S5 (подробнее см. в [7, 8]).

Итак, при построении семантики данного типа для S5 использовались только содержательно оправданные понятия (классического) описания состояния, конечных ограниченных и дополнительно ограниченных множеств описаний состояний. Соответствующие объекты могут быть эффективно перечислены при помощи простых арифметических функций, что демонстрирует конструктивный характер семантик данного типа. Рассмотренный подход может быть естественным образом использован при построении семантик для ряда других модальных исчислений, а также некоторых систем интуиционистской логики. Эти вопросы будут подробно рассмотрены в следующих статьях автора, посвященных данной тематике.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Сидоренко Е.А. *Логика, парадоксы, возможные миры*. Москва, УРСС, 2002, 310 с.
- [2] Войшвилло Е.К. Содержательный анализ модальностей S4 и S5. *Философские науки*, 1983, № 3, с. 76–82.
- [3] Крипке С. Семантический анализ модальной логики. В кн. Р. Фейс. *Модальная логика*. Москва, Наука, 1974, с. 254–303.

- [4] Priest G. *An Introduction to Non-Classical Logic: From If to Is*. Cambridge, Cambridge University Press, 2008, 613 p.
- [5] Ивлев Ю.В. *Модальная логика*. Москва, Изд-во МГУ, 1991, с. 168–190.
- [6] Бочаров В.А., Маркин В.И. *Введение в логику*. Москва, Инфра-М, 2008, 551 с.
- [7] Архиев Н.Л. Логические модальности как арифметические функции. *Логические исследования*, 2010, вып. 16, с. 3–22.
- [8] Архиев Н.Л. Трехзначная не-истинностно-функциональная модальная логика. *Логико-философские исследования*, 2010, вып. 4, с. 123–130.

Статья поступила в редакцию 01.07.2016

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Архиев Н.Л. Теория логических модальностей без «возможных миров». *Гуманитарный вестник*, 2016, вып. 7. <http://dx.doi.org/10.18698/2306-8477-2016-07-373>

Архиев Николай Львович — канд. филос. наук, доцент кафедры «Философия» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: arkh-nikolaj@yandex.ru

Theory of logical modalities without “possible worlds”

© N.L. Arkhiereev

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The article examines the main problems of “traditional” modal logic semantics — so called possible worlds semantics. Interpreting modal operators meanings semantics data involve either the notion of the real world, or the notion of the model structure and the accessibility relations between the worlds. The last one does not have the monosemantic interpretation, therefore leads to series of paradoxes. In addition, we have researched the main principles of the alternative semantics construction for the Lewes system S5 — semantics of restricted set of state-descriptions and relatively restricted sets of state-descriptions. This semantics uses only the “classical” notions such as state-descriptions, state-descriptions sets, semantical validity, satisfiability, etc. That is what distinguishes them from possible world semantics.

Keywords: modality, possible world, model structure, accessibility relation, restricted set of state-descriptions, truth, false, validity, satisfiability.

REFERENCES

- [1] Sidorenko E.A. *Logika, paradoksy, vozmozhniye miry* [Logic, paradoxes, possible worlds]. Moscow, URSS Publ., 2002, 310 p.
- [2] Voyshvillo E.K. *Filosofskiyе nauki — Philosophical sciences*, Moscow, 1983, no. 3, pp. 76–80.
- [3] Kripke S. Semanticheskiiy analiz modalnoy logiki [Semantic analysis of modal logics]. In: R. Feys. *Modalnaya logika* [Modal logics]. Moscow, Nauka, 1974, pp. 254–303. [in Russ.].
- [4] Priest G. *An Introduction to Non-Classical Logic: From If to Is*. Cambridge, Cambridge University Press, 2008, 613 p.
- [5] Ivlev Yu.V. *Modalnaya logika* [Modal logics]. Moscow, MGU Publ., 1991, pp. 168–190.
- [6] Bocharov V.A., Markin V.I. *Vvedeniye v logiku* [Introduction to logics]. Moscow, Infra-M Publ., 2008, 354 p.
- [7] Arkhiereev N.L. *Logicheskiye issledovaniya — Logical Research*, 2010, iss. 16, pp. 3–22.
- [8] Arkhiereev N.L. *Logiko-filosofskiyе issledovaniya — Logic and Philosophical Research*, 2010, iss. 4, pp. 123–130.

Arkhiereev N.L., Cand. Sci. (Philosophy), Assoc. Professor, “Philosophy” Department, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: arkh-nikolaj@yandex.ru