УДК 517 DOI 10.18698/2306-8477-2016-05-360

Методические аспекты подходов к преподаванию теории пределов функций

© Ф.Х. Ахметова, А.В. Косова, И.Н. Пелевина

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассмотрены вопросы преподавания теории пределов в курсе математического анализа и проблемы, возникающие при изложении учебного материала. Для решения трудностей при записи окрестностей конечной и бесконечной точек при различном стремлении аргумента предложена таблица, в которой рассмотрены все возможные варианты стремления аргумента, расписанные через окрестности и интервалы, и даны определения предела функции по Коши для всех рассмотренных в таблице случаев. Неопределенности и способы их устранения при нахождении пределов функции также сведены в таблицу. Проиллюстрирована методика вычисления всевозможных пределов на широком спектре задач.

Ключевые слова: *предел функции по Коши и по Гейне, окрестность конечной и бесконечной точек, раскрытие неопределенностей.*

Введение. В инженерном образовании построение математических моделей физических и механических процессов играет важнейшую роль, поскольку будущий специалист должен уметь проводить анализ инженерных задач за счет использования математических методов и давать качественную оценку полученного результата. Для этого на первых этапах обучения используют аппарат математического анализа и изучают его основные понятия.

Для начала отметим, что предел функции — это одно из ключевых понятий математического анализа, оно вводится на первых лекциях и затем постоянно используется в дальнейшем. С помощью определения предела функции по Коши доказывается целый ряд важнейших теорем, как это видно из работ [1–4]. Поэтому студентам необходимо научиться расписывать пределы при различных стремлениях аргумента, уметь оперировать ими и находить значения пределов функции, даже если возникают неопределенности при вычислениях.

Теория пределов функций. Трактовка предела функции по Коши. Прежде чем дать определение предела функции по Коши, предлагается ввести понятия окрестностей конечной и бесконечной точек при различном стремлении аргумента. Для удобства восприятия сведем все эти понятия в табл. 1.

Таблица 1

Понятия окрестностей конечной и бесконечной точек при различном стремлении аргумента

Тип стремления	Окрестность
$x \to a$	$\overset{\circ}{U}_{\delta}(a) = (a-\delta; a) \cup (a; a+\delta) = \{0 < \lvert x-a \rvert < \delta\}$
$x \to a^{+} = x \to a+0$ $(x \to a, x > a)$	$\overset{\circ}{U}{}^{+}_{\delta}(a) = (a; a+\delta) = \{a < x < a+\delta\}$
$x \to a^{-} = x \to a-0$ $(x \to a, x < a)$	$\overset{\circ}{U}{}^{-}_{\delta}(a) = (a-\delta; a) = \{a-\delta < x < a\}$
$x \to \infty$	$\overset{\circ}{U}(\infty) = (-\infty; -M) \cup (M; +\infty) = \{\lvert x \rvert > M\}$
$x \to +\infty$	$\overset{\circ}{U}(+\infty) = (M; +\infty) = \{x > M\}$
$x \to -\infty$	$\overset{\circ}{U}(-\infty) = (-\infty; -M) = \{x < -M\}$

Используя результаты табл. 1, продемонстрируем, как будут выглядеть определения пределов функции $f(x)$ по Коши при различных стремлениях аргумента x.

Определение 1. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ в точке $x = a$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(a)$ (или для всех $x: 0 < \lvert x-a \rvert < \delta$) выполняется неравенство $\lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$.

То же с помощью логических символов: $\left(\lim\limits_{x \to a} f(x) = A\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \;\; \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(a)\right) \Rightarrow \left(\lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon\right).$$

Определение 2. Число A называется *правым пределом функции* $f(x)$ в точке $x = a$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $x \in \overset{\circ}{U}{}^{+}_{\delta}(a)$ (или для всех $x: a < x < a+\delta$) выполняется неравенство $\lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$.

То же с помощью логических символов: $\left(\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left(\forall\varepsilon>0\ \ \exists\ \ \delta=\delta(\varepsilon)>0:\forall x\in\overset{\circ}{U}{}^{+}_{\delta}(a)\right)\Rightarrow\left(\left|f(x)-A\right|<\varepsilon\right).$$

Определение 3. Число A называется *левым пределом функции* $f(x)$ в точке $x=a$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что для всех $x\in\overset{\circ}{U}{}^{-}_{\delta}(a)$ (или для всех $x:a-\delta<x<a$) выполняется неравенство $\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$.

То же с помощью логических символов: $\left(\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=A\right)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left(\forall\varepsilon>0\ \ \exists\ \ \delta=\delta(\varepsilon)>0:\forall x\in\overset{\circ}{U}{}^{-}_{\delta}(a)\right)\Rightarrow\left(\left|f(x)-A\right|<\varepsilon\right).$$

Определение 4. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ *в бесконечно удаленной точке* ($x\to\infty$), если для любого сколь угодно малого $\varepsilon>0$ найдется такое $M=M(\varepsilon)>0$, что для всех $x\in\overset{\circ}{U}(\infty)$ (или для всех $x:|x|>M$) выполняется неравенство $\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$.

То же с помощью логических символов: $\left(\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\right)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left(\forall\varepsilon>0\ \ \exists\ \ M=M(\varepsilon)>0:\forall x\in\overset{\circ}{U}(\infty)\right)\Rightarrow\left(\left|f(x)-A\right|<\varepsilon\right).$$

Определение 5. Число A называется *правым пределом функции* $f(x)$ *в бесконечно удаленной точке* ($x\to+\infty$), если для любого сколь угодно малого $\varepsilon>0$ найдется такое $M=M(\varepsilon)>0$, что для всех $x\in\overset{\circ}{U}(+\infty)$ (или для всех $x:x>M$) выполняется неравенство $\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$.

То же с помощью логических символов: $\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A\right)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left(\forall\varepsilon>0\ \ \exists\ \ M=M(\varepsilon)>0:\forall x\in\overset{\circ}{U}(+\infty)\right)\Rightarrow\left(\left|f(x)-A\right|<\varepsilon\right).$$

Определение 6. Число A называется *левым пределом функции* $f(x)$ *в бесконечно удаленной точке* ($x\to-\infty$), если для любого сколь угодно малого $\varepsilon>0$ найдется такое $M=M(\varepsilon)>0$, что для всех $x\in\overset{\circ}{U}(-\infty)$ (или для всех $x:x<-M$) выполняется неравенство $\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$.

То же с помощью логических символов: $\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A\right)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \;\; M = M(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}(-\infty)\right) \Rightarrow \left(\left| f(x) - A \right| < \varepsilon\right).$$

А теперь рассмотрим определения предела функции по Коши другого вида, а именно когда функция имеет различные стремления.

Определение 7. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, если для сколь угодно большого числа $K > 0$ найдется такое $\delta = \delta(K) > 0$, что для всех $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a)$ выполняется неравенство $\left| f(x) \right| > K$.

То же с помощью логических символов: $\left(\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\forall K > 0 \;\; \exists \;\; \delta = \delta(K) > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a)\right) \Rightarrow \left(\left| f(x) \right| > K\right).$$

Определение 8. $\left(\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = -\infty\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\forall K > 0 \;\; \exists \;\; \delta = \delta(K) > 0 : \; \forall x \in \overset{\circ}{U}{}^{+}_\delta(a)\right) \Rightarrow \left(f(x) < -K\right).$$

Определение 9. $\left(\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = +\infty\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\forall K > 0 \;\; \exists \;\; \delta = \delta(K) > 0 : \; \forall x \in \overset{\circ}{U}{}^{-}_\delta(a)\right) \Rightarrow \left(f(x) > K\right).$$

Определение 10. $\left(\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\forall K > 0 \;\; \exists \;\; M = M(K) > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}(\infty)\right) \Rightarrow \; \left(\left| f(x) \right| > K\right).$$

Определение 11. $\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\forall K > 0 \;\; \exists \;\; M = M(K) > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}(+\infty)\right) \Rightarrow \; \left(f(x) < -K\right).$$

Пределы 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11 называются односторонними.

Рассмотрим ниже примеры задач, которые позволят более детально разъяснить студентам содержание и смысл базовых определений 1–11.

Задача 1. Доказать по определению: $\lim\limits_{x\to 1}(2x+1) = 3$.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$: $\left|2x+1-3\right| < \varepsilon$ $\Leftrightarrow$ $2\left|x-1\right| < \varepsilon$ $\Leftrightarrow$ $\left|x-1\right| < \dfrac{\varepsilon}{2} = \delta(\varepsilon)$. Таким образом, для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ $\delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ такое, что для $\forall x : \left|x-1\right| < \delta$ выполняется неравенство $\left|2x+1-3\right| < \varepsilon$. Например, для $\varepsilon = 0{,}1$ $\exists$ $\delta = 0{,}05$.

Задача 2. Доказать по определению: $\lim\limits_{x\to 3+0}\dfrac{x^2-9}{x-3}=6$.

Возьмем произвольное $\varepsilon>0$ и найдем $\delta=\delta(\varepsilon)>0$: $\left|\dfrac{x^2-9}{x-3}-6\right|<\varepsilon$ $\Leftrightarrow$ $|x+3-6|<\varepsilon$ $\Leftrightarrow$ $|x-3|<\varepsilon=\delta(\varepsilon)$. Таким образом, для $\forall\varepsilon>0$ $\exists$ $\delta(\varepsilon)=\varepsilon>0$ такое, что для $\forall x:3<x<3+\delta$ выполняется неравенство $\left|\dfrac{x^2-9}{x-3}-6\right|<\varepsilon$.

Задача 3. Доказать по определению: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{3x}=\dfrac{2}{3}$.

Возьмем произвольное $\varepsilon>0$ и найдем $M=M(\varepsilon)>0$: $\left|\dfrac{2x+1}{3x}-\dfrac{2}{3}\right|<\varepsilon$ $\Leftrightarrow$ $\left|\dfrac{2x+1-2x}{3x}\right|<\varepsilon$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{1}{3|x|}<\varepsilon$ $\Leftrightarrow$ $|x|>\dfrac{1}{3\varepsilon}=M(\varepsilon)$. Таким образом, для $\forall\varepsilon>0$ $\exists$ $M=\dfrac{1}{3\varepsilon}>0$ такое, что для $\forall x:|x|>M$ выполняется неравенство $\left|\dfrac{2x+1}{3x}-\dfrac{2}{3}\right|<\varepsilon$.

Приведем теоремы, которые послужат теоретическим обоснованием при решении задач.

Теорема 1 (о единственности предела). Если предел функции в точке существует, то он единствен.

Определение 12. Функция $y=f(x)$ называется *локально ограниченной*, если она ограничена при $x\to a$: существует такое $c>0$ и такая $\overset{\circ}{U}(a)$, что для всех $x\in\overset{\circ}{U}(a)$ выполняется неравенство $|f(x)|\le c$.

Пример 1. Функция $y=x^2+2$ локально ограничена при $x\to 0$.

Теорема 2 (о локальной ограниченности функции, имеющей конечный предел). Если функция $y=f(x)$ имеет конечный предел в точке $x=a$, то она локально ограничена.

Теорема 3 (о пределе промежуточной функции). Если существуют конечный $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$, конечный $\lim\limits_{x\to a}g(x)=A$ и такая $\overset{\circ}{U}(a)$, что для любых $x\in\overset{\circ}{U}(a)$ выполняется неравенство $f(x)\le h(x)\le g(x)$, то существует конечный $\lim\limits_{x\to a}h(x)=A$.

Теорема 4 (арифметические операции с функциями, имеющими конечные пределы). Если существуют конечный $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и конечный $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, то существуют конечные:

- $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x) \pm g(x)\big) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x) = A \pm B$;
- $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = A \cdot B$;
- $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{A}{B}$ при условии, что $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \neq 0$.

Теорема 5 (о замене переменной в пределе или о пределе сложной функции). Если функция $y = f(x)$ имеет в точке a конечный предел b и не принимает значение b в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(a)$ точки a, а функция $g(y)$ имеет в точке b конечный предел c, то сложная функция $g\big(f(x)\big)$ имеет предел в точке a, и он равен c.

Студентам необходимо на примере разъяснить смысл этой теоремы. Поскольку предел функции – это число, то, делая замену переменной, нет необходимости возвращаться к прежней переменной.

Задача 4. Вычислим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[k]{1+x}-1}{x} = \left|\begin{array}{l} \textit{замена}: \\ 1+x = y^k \\ x\to 0 \Rightarrow y\to 1 \end{array}\right| = \lim_{y\to 1}\frac{y-1}{y^k-1} =$$

$$= \lim_{y\to 1}\frac{y-1}{(y-1)\left(y^{k-1}+y^{k-2}+\ldots+y+1\right)} =$$

$$= \left|\textit{причем} \quad y\neq 1 \quad \textit{для} \quad \forall x\in \overset{\circ}{U}(0)\right| = \lim_{y\to 1}\frac{1}{y^{k-1}+y^{k-2}+\ldots+y+1} = \frac{1}{k}.$$

Если точка $x = a$ принадлежит области определения элементарной функции $f(x)$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Задача 5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \sin 3x = \sin\left(3\dfrac{\pi}{6}\right) = 1$.

Основные способы вычисления пределов, содержащих неопределенности. Решение любой задачи на вычисление предела функции подчиняется определенному алгоритму, а именно:

1) подставить в выражение предельное значение аргумента;

2) определить, есть или нет неопределенность. Если нет, дать ответ;

3) если неопределенность есть, то по ее виду выбрать одно из правил устранения этой неопределенности;

4) преобразовать выражение согласно выбранному правилу и к новой форме предела применить данный алгоритм, начиная с п. 1.

Многолетняя практика преподавания этой темы показывает, что основные методы вычисления пределов лучше структурировать в табл. 2. Это существенно поможет восприятию неопределенностей, способов их устранения и облегчит усвоение студентами приемов вычисления пределов функций.

Таблица 2

Основные методы вычисления пределов

Тип неопределенности	Правило раскрытия
$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$	Необходимо в числителе и знаменателе «главное» слагаемое (растущее быстрее всех) вынести за скобки; если слагаемое выбрано верно, то предел скобки равен константе, не равной нулю
$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$	В числителе и знаменателе необходимо выделить «критический» множитель вида ($x-a$), на который затем дробь сократить; если неопределенность сохраняется, действия повторить
$\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x))=\left[\infty-\infty\right]$	Необходимо разность свести к дроби; при этом тип неопределенности поменяется, либо неопределенности не будет вовсе

Рассмотрим правила раскрытия неопределенностей, приведенных в табл. 2, на примерах задач.

Задача 6. Вычислить $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^4+2x^3-x^2-4x-2}{x^3+3x^2+3x+1}$.

При подстановке $x=-1$ в числитель и знаменатель получаем $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Это значит, что в числителе и знаменателе есть общий множитель $(x+1)$. Разложим на множители многочлены числителя и знаменателя:

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^4+2x^3-x^2-4x-2}{x^3+3x^2+3x+1}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)^2\left(x^2-2\right)}{(x+1)^3}=\lim_{x\to-1}\frac{x^2-2}{x+1}=\frac{-1}{0}=\infty.$$

Задача 7. Вычислить $\lim\limits_{x\to 64}\dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$.

Снова имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Для выделения «критического» множителя в этом случае удобно использовать замену переменной, выбрав ее так, чтобы избавиться от иррациональностей в числителе и знаменателе: $\sqrt[6]{x}=t$. При $x\to 64$, $t\to\sqrt[6]{64}=2$

$$\lim_{x\to 64}\frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}=\lim_{t\to 2}\frac{t^3-8}{t^2-4}=\lim_{t\to 2}\frac{(t-2)\left(t^2+2t+4\right)}{(t-2)(t+2)}=\lim_{t\to 2}\frac{t^2+2t+4}{t+2}=\frac{12}{4}=3.$$

Задача 8. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+5x+1}-\sqrt{4x^2-5x+1}\right)$.

В приведенном примере существует неопределенность вида $[\infty-\infty]$. Чтобы раскрыть ее, необходимо свести выражение, стоящее под знаком предела, к дроби. Сделаем это, домножив на сопряженное. В результате тип неопределенности сменится на $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Раскроем эту неопределенность, вынося самые «весомые» слагаемые числителя и знаменателя за скобки:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+5x+1}-\sqrt{4x^2-5x+1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2+5x+1}-\sqrt{4x^2-5x+1}\right)\left(\sqrt{4x^2+5x+1}+\sqrt{4x^2-5x+1}\right)}{\left(\sqrt{4x^2+5x+1}+\sqrt{4x^2-5x+1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+5x+1-4x^2+5x-1}{\sqrt{4x^2+5x+1}+\sqrt{4x^2-5x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{10x}{\sqrt{4x^2+5x+1}+\sqrt{4x^2-5x+1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{10x}{\sqrt{4x^2}\left(\sqrt{1+\dfrac{5}{4x}+\dfrac{1}{4x^2}}+\sqrt{1-\dfrac{5}{4x}+\dfrac{1}{4x^2}}\right)}=\left|\begin{array}{l}\textit{напомним, что}\\ \sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases}x,\ \textit{если}\ x\ge 0;\\ -x,\ \textit{если}\ x<0\end{cases}\end{array}\right|=$$

$$=\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{10x}{-2x\cdot 2}=-\dfrac{5}{2}\ \textit{при}\ x\to-\infty,\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{10x}{2x\cdot 2}=\dfrac{5}{2}\ \textit{при}\ x\to+\infty.\end{cases}$$

Трактовка предела функции по Гейне. Для того чтобы у студентов не сложилось ложное представление о существовании определения предела функции только в трактовке Коши, полезно рассмотреть определение конечного предела функции по Гейне на языке «последовательностей».

Определение 13. Число A называется **пределом функции** $f(x)$ в точке $x=a$, если для любой такой последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $x_n \neq a$ при любых $n \in \mathbb{N}$, соответствующие последовательности $\{f(x_n)\}$ значений функции сходятся к одному и тому же A (имеют один и тот же предел, равный A).

Или с помощью логических символов: $\left(\lim\limits_{x\to a} f(x) = A\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\forall \{x_n\} : \lim_{n\to\infty} x_n = a, x_n \neq a \forall n \in \mathbb{N}\right) \Rightarrow \left(\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A\right).$$

Теорема 6. Определения конечного предела функции по Коши и по Гейне эквивалентны.

Определение конечного предела функции по Гейне студенты воспринимают хуже. Тем не менее рассмотрим задачу, на примере которой проиллюстрируем применение определения 13.

Задача 9. Доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$ не существует.

Воспользуемся определением предела функции по Гейне. Выберем две числовые последовательности: $\left\{x_n^{(1)}\right\} = \{\pi n\}$ и $\left\{x_n^{(2)}\right\} = \dfrac{\pi(4n+1)}{2}$.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{(1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \pi n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{(2)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(4n+1)\pi}{2} = +\infty$, но $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(x_n^{(1)}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \sin \pi n = 0$, а $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(x_n^{(2)}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \sin \dfrac{\pi(4n+1)}{2} = 1$.

Следовательно, функция $f(x) = \sin x$ не имеет предела при $x \to +\infty$ (так как последовательности $\left\{f\left(x_n^{(1)}\right)\right\}$ и $\left\{f\left(x_n^{(2)}\right)\right\}$ имеют разные пределы, что невозможно в силу единственности предела).

Заключение. Методика, которая положена в основу данной работы, позволяет существенно ускорить процесс подготовки и проведения семинарских занятий, посвященных изучению пределов функций, выполнения домашнего задания, подготовки к рубежному контролю и экзамену. Обобщен опыт изложения материала по указанной теме [5–10], предложены таблицы, которые весьма облегчают восприятие теории пределов и помогают при решении задач.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Основы математического анализа*. В 2 ч., ч. 1. Москва, Физматлит, 2005, 648 с.

[2] Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. *Математический анализ*. В 2 ч., ч. 1. Москва, Юрайт, 2013, 660 с.

[3] Морозова В.Д. *Введение в анализ*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014, 408 с.

[4] Пискунов Н.С. *Дифференциальное и интегральное исчисление*. В 2 т, т. 1. Москва, Интеграл-Пресс, 2010, 416 с.

[5] Ахметова Ф.Х., Косова А.В., Пелевина И.Н. *Введение в анализ. Теория пределов*. В 3 ч., ч. 1. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014, 33 с.

[6] Ахметова Ф.Х., Ефремова С.Н., Ласковая Т.А. *Введение в анализ. Теория пределов*. В 3 ч., ч. 2. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014, 28 с.

[7] Ахметова Ф.Х., Ласковая Т.А., Пелевина И.Н. *Введение в анализ. Теория пределов*. В 3 ч., ч. 3. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014, 24 с.

[8] Ахметова Ф.Х., Ласковая Т.А., Пелевина И.Н. Научно-методические проблемы преподавания теории бесконечно малых функций. *Тезисы Международной научной конференции «Физико-математические проблемы создания новой техники» 17–19 ноября 2014*. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014, с. 104–105.

[9] Ахметова Ф.Х., Ласковая Т.А., Пелевина И.Н. Методологические аспекты выделения главных частей бесконечно больших функций. *Инженерный вестник*, 2015, № 5. URL: http://engbul.bmstu.ru/doc/773087.html

[10] Ахметова Ф.Х., Ласковая Т.А., Пелевина И.Н. Методологические аспекты выделения главных частей бесконечно малых функций. *Инженерный вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана*, 2015, № 5. URL: http://engbul.bmstu.ru/doc/771171.html

Статья поступила в редакцию 03.06.2016

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Ахметова Ф.Х., Косова А.В., Пелевина И.Н. Методические аспекты подходов к преподаванию теории пределов функций. *Гуманитарный вестник,* 2016, вып. 5.

http://dx.doi.org/ 10.18698/2306-8477-2016-05-360

Ахметова Фания Харисовна — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Математическое моделирование» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сфера научных интересов — математический анализ, математическое моделирование.
e-mail: dobrich2@mail.ru

Косова Анна Владимировна — старший преподаватель кафедры «Математическое моделирование» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сфера научных интересов — математический анализ, математическое моделирование.
e-mail: anna.v.kosova@mail.ru

Пелевина Ирина Николаевна — старший преподаватель кафедры «Математическое моделирование» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сфера научных интересов — математический анализ, математическое моделирование.
e-mail: pdv62@mail.ru

Methodical aspects of approaches to teaching theory of function limits

© F.Kh. Akhmetova, A.V. Kosova, I.N. Pelevina

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The article discusses some aspects of teaching the theory of limits in the course of mathematical analysis and the problems arising in presenting the educational material. To solve the difficulties in recording the neighborhood of finite and infinite points at different argument tendencies a table is offered that addresses all possible argument tendencies, described through the neighborhoods and intervals, and the Cauchy definitions of the function limit for all cases presented in the table are given. The table summarizing the uncertainties and ways to address them in finding limits of functions is also given. The techniques of calculating all possible limits are illustrated on a wide range of tasks.

Keywords: *Cauchy and Heine function limit, neighborhood of finite and infinite points, evaluation of indeterminate forms.*

REFERENCES

[1] Ilyin V.A., Poznyak E.G. *Osnovy matematicheskogo analiza. V 2 chastyakh. Ch. 1* [Fundamentals of mathematical analysis. In 2 parts. Part 1]. Moscow, Fizmatlit, 2005, 648 p.

[2] Ilyin V.A., Sadovnichiy V.A., Sendov B.Kh. *Matematicheskiy analiz. V 2 chastyakh. Ch. 1* [Mathematical analysis. In 2 parts. Part 1]. Moscow, Yurayt Publ., 2013, 660 p.

[3] Morozova V.D. *Vvedenie v analiz* [Introduction to Calculus]. Moscow, BMSTU Publ., 2014, 408 p.

[4] Piskunov N.S. *Differentsialnoe i integralnoe ischislenie. V 2 tomakh. Tom 1* [Differential and Integral Calculus. In 2 volumes. Vol. 1]. Moscow, Integral-Press Publ., 2010, 416 p.

[5] Akhmetova F.Kh., Kosova A.V., Pelevina I.N. *Vvedenie v analiz. Teoriya predelov. V 3 chastyakh. Ch. 1* [Introduction to Calculus. Theory of limits. In 3 parts. P. 1]. Moscow, BMSTU Publ., 2014, 33 p.

[6] Akhmetova F.Kh., Efremova S.N., Laskovaya T.A. *Vvedenie v analiz. Teoriya predelov. V 3 chastyakh. Ch. 2* [Introduction to Calculus. Theory of limits. In 3 parts. Part 2]. Moscow, BMSTU Publ., 2014, 28 p.

[7] Akhmetova F.Kh., Laskovaya T.A. Pelevina I.N. *Vvedenie v analiz. Teoriya predelov. V 3 chastyakh. Ch. 3* [Introduction to Calculus. Theory of limits. In 3 parts. Part 3]. Moscow, BMSTU Publ., 2014, 24 p.

[8] Akhmetova F.Kh., Laskovaya T.A. Pelevina I.N. Nauchno-metodicheskie problemy prepodavaniya teorii beskonechno malykh funktsiy [Scientific and methodical problems of teaching the theory of infinitesimal functions]. *Tezisy Mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii “Fiziko-natematicheskie problemy sozdaniya novoy tekhniki”* [Abstracts of the International Scientific Conference "Physical and mathematical problems of new technology creation", November 17–19, 2014]. Moscow, BMSTU Publ., 2014, p. 104–105.

[9] Akhmetova F.Kh., Laskovaya T.A. Pelevina I.N. *Inzhenernyy vestnik — Engineering Bulletin*, 2015, no. 4. Available at: http://engbul.bmstu.ru/doc/773087.html

[10] Akhmetova F.Kh., Laskovaya T.A. Pelevina I.N. *Inzhenernyy vestnik — Engineering Bulletin*, 2015, no. 5. Available at: http://engbul.bmstu.ru/doc/771171.html

Akhmetova F.Kh., Cand. Sci., (Phys.&Math.), Associate Professor, Department of Mathematical Modeling, Bauman Moscow State Technical University. Research interests: Mathematical analysis, Mathematical modeling. e-mail: dobrich2@mail.ru

Kosova A.V., senior lecturer, Department of Mathematical Modeling, Bauman Moscow State Technical University. Research interests: mathematical analysis, mathematical modeling. e-mail: anna.v.kosova@mail.ru

Pelevina I.N., senior lecturer, Department of Mathematical Modeling, Bauman Moscow State Technical University. Research interests: mathematical analysis, mathematical modeling. e-mail: pdv62@mail.ru